

Das Brezis-Nirenberg-Problem auf der Sphäre S^n

Inauguraldissertation

zur

Erlangung der Würde eines Doktors der Philosophie

vorgelegt der

Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Basel

von

Simon I. Stingelin

aus Pratteln

Muttenz, 2004

Genehmigt von der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
auf Antrag von

Prof. Dr. C. Bandle
Prof. Dr. M. Plum (Universität Karlsruhe)

Basel, den 4. Mai 2004

Prof. Dr. M. Tanner, Dekan

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Allgemeine Existenzresultate	5
1.1 Die lokale Palais-Smale-Bedingung	6
1.2 Allgemeines sublineares Problem	11
1.3 Allgemeines superlineares Problem	15
1.4 Minimierung unter Nebenbedingung	22
1.5 Zusammenfassung	25
2 Das Brezis-Nirenberg-Problem auf der Sphäre	27
2.1 Stereographische Projektion und geodätische Koordinaten . .	28
2.2 Das Brezis-Nirenberg-Problem	29
2.3 Allgemeines Existenzresultat	30
2.4 Allgemeines Nichtexistenzresultat	33
2.5 Der lineare Fall	40
2.6 Der superlineare Fall	54
2.7 Der sublineare Fall	68
2.8 Der Grenzfall	72
2.9 Numerische Lösungen in grossen Kugeln	76
3 Numerische Methoden	85
3.1 Strategie	85
3.2 Schiessmethode	86
3.3 Keller-Methode	88
A Substitution auf konformen Mannigfaltigkeiten	95
B Die Pohozaev-Identität	97

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Arbeit betrachten wir einführend im Kapitel 1 nichtlineare partielle Differenzialgleichungen von der Form:

$$\begin{aligned} -\Delta_p u - b(x)u^{p-1} &= f(x, u) + c(x)u^{p^*-1} && \text{in } \Omega \\ u &> 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $\Delta_p u = \operatorname{div}(a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ mit $a(x) > 0$ in $\bar{\Omega}$ und $1 < p < n$. Das Gebiet Ω sei beschränkt in \mathbb{R}^n mit $n \geq 3$ und $p^* = \frac{np}{n-p}$ der kritische Sobolev-Exponent. Da die Sobolev-Einbettung von $W_0^{1,p}(\Omega)$ nach $L^{p^*}(\Omega)$ nur stetig und nicht mehr kompakt ist, lassen sich die Standard-Methoden der Variationsrechnung nicht anwenden. Wir werden jedoch im Kapitel 1 zeigen, dass das zum obigen Problem gehörige Funktional Ψ einer lokalen Kompaktheitsbedingung genügt. Mit Hilfe dieser Kompaktheitseigenschaft und dem Mountainpass-Lemma bzw. dem Variationsprinzip von Ekeland werden wir die Existenz von schwachen Lösungen beweisen. Die Beweismethode hängt vom Wachstum der Störung $f(x, \cdot)$ in null ab.

Im Hauptteil der Arbeit, dem Kapitel 2, wenden wir uns dem Brezis-Nirenberg-Problem auf der Sphäre zu. Unter dem (verallgemeinerten) Brezis-Nirenberg-Problem auf der Sphäre \mathbb{S}^n verstehen wir das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta_{p,\mathbb{S}^n} u - \lambda u^{q-1} &= u^{p^*-1} && \text{in } \Omega' \subset \mathbb{S}^n \\ u &> 0 && \text{in } \Omega' \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega', \end{aligned} \tag{*}$$

wobei $\Omega' \neq \mathbb{S}^n$ ein Gebiet auf der Sphäre \mathbb{S}^n ist. Die Parameter abhängige Störung sei von niedrigerer Ordnung, daher gilt $1 < q < p^*$.

Das Problem hat seine ursprüngliche Motivation im Yamabe Problem (siehe Aubin [3]). Brezis und Nirenberg untersuchten in der Arbeit [13] das nichtlineare elliptische Randwertproblem für den Laplace-Operator in beschränkten Gebieten im euklidischen Raum \mathbb{R}^n . Ebenfalls für den Laplace-Operator untersuchten Ambrosetti, Brezis und Cerami in [2] das in null

superlineare Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u - \lambda u^{q-1} &= u^{\frac{n+2}{n-2}} && \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &> 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit $1 < q < 2$. Sie beweisen die Existenz von zwei positiven Lösungen. Das in null superlineare p -Laplace Problem behandelten Azorero und Alonso in [24] und [26]. Unter geeigneten Voraussetzungen konnten sie ebenfalls die Existenz von zwei positiven Lösungen beweisen.

Im Artikel [10] stellt Brezis fest, dass die Existenz von Lösungen für das Brezis-Nirenberg-Problem einerseits von λ , andererseits aber auch von der Topologie des Gebiets Ω abhängt. Ausgehend davon betrachteten Bandle, Brillard und Flucher [5] dieses Problem auf Gebieten in Räumen konstanter skalarer Krümmung. In ihrer Doktorarbeit [40] untersuchte S. Stapelkamp das Brezis-Nirenberg Problem im hyperbolischen Raum \mathbb{H}^n und in [4] untersuchten Bandle und Benguria die Existenz und Nichtexistenz von rotationssymmetrischen Lösungen für $p = q = 2$ in geodätischen Kugeln auf der S^3 . In dem Zusammenhang konnten Bandle und Benguria ein sehr interessantes Phänomen beobachten. So beschrieben sie in [4] als erste numerisch berechnete Lösungen in grossen Kugeln für $\lambda \ll 0$.

Das Kapitel 2 ist folgendermassen aufgebaut: In einem ersten Schritt wird im Kapitel 2.3 ein Existenzresultat von Bandle, Fleckinger und de Thélin [6] für $\lambda > 0$ verallgemeinert. Im Kapitel 2.4 wird die Nichtexistenz von Lösungen für (*) betrachtet. Es zeigt sich, dass aus der Pohozaev-Identität für den p -Laplace-Beltrami-Operator in sternförmigen Gebieten keine Aussage gewonnen werden kann. Wir werden uns daher auf rotationssymmetrische Lösungen in geodätischen Kugeln konzentrieren. Das Resultat schliesst eine Lücke zwischen Existenz und Nichtexistenz für $p \in (\frac{n+2}{3}, \frac{n+1}{2})$ der Arbeit von Bandle, Fleckinger und de Thélin [6]. Im Folgenden werden die Fälle abhängig von $p \gtrless q$ für das Problem (*) separat betrachtet, wobei jeweils der Laplace-Beltrami-Operator ($p = 2$) und der p -Laplace-Beltrami-Operator ($p \neq 2$) getrennt diskutiert wird. Der lineare Fall ($p = q$) ergänzt für $n \geq 4$ die Arbeit von Bandle und Benguria [4]. Im superlinearen Fall ($1 < q < p$) wird durch Minimieren eines abgeschnittenen Funktionals eine Lösung für (*) gefunden. Mit Hilfe von diesem Minimierer folgt aus dem Mountainpass-Lemma unter geeigneten Voraussetzungen eine zweite Lösung für (*). Für den sublinearen Fall ($p < q < p^*$) folgt aus dem Kapitel 1 die Existenz eines $\lambda^* \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $\lambda > \lambda^*$ eine Lösung für (*) existiert. Es wird daher in dem Kapitel darum gehen, λ^* genauer zu beschreiben. Mit Hilfe der in Kapitel 3 beschriebenen numerischen Methoden werden im Kapitel 2.9 die von Bandle und Benguria numerisch gefundenen Lösungen systematisch untersucht. Es stellt sich dabei heraus, dass die Lösungen eine grosse Struktur aufweisen und unabhängig vom kritischen

Sobolev-Exponent berechnet werden können. Der Existenzbeweis für diese Lösungen ist nach wie vor offen.

Das Kapitel 3 behandelt die verwendeten numerischen Methoden zum Berechnen von Lösungen, sowie von Lösungspfaden des Brezis-Nirenberg-Problems. Da die Dimension $n \geq 3$ ist, konzentrieren wir uns auf rotationsymmetrische Lösungen in geodätischen Kugeln. Mit Hilfe von Schiessmethoden erhalten wir einen Punkt auf einem Lösungspfad, den wir mit der "path continuation"-Methode von Keller [32] in einem finite Elemente Raum fortsetzen.

Notation

Die zu den Sobolev-Räumen $W_0^{1,p}(\Omega)$ gehörigen Normen bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_p$ und die Normen zu den Räumen der Lebesgue messbaren Funktionen $L^q(\Omega)$ mit $|\cdot|_{L^q}$. Für den kritischen Sobolev-Exponent verwenden wir die Notation $p^* = \frac{np}{n-p}$ und mit

$$S_p = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,p} \\ |u|_{L^{p^*}}=1}} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx$$

bezeichnen wir (bis auf die Potenz $-1/p$) die beste Konstante für die Sobolev-Einbettung $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$. Es gilt daher

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \right)^{1/p^*} \leq S_p^{-1/p} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Die Konstante ist gegeben durch

$$(S_p)^{1/p} = \frac{(n-p)}{p-1} \left(\frac{n(p-1)}{n-p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\Gamma(1+n-\frac{n}{p}) \Gamma(\frac{n}{p}) \omega(n-1)}{\Gamma(1+n)} \right)^{\frac{1}{n}},$$

wobei

$$\omega(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} = \frac{1}{n} |\mathbb{S}^{n-1}|$$

das Volumen der n dimensionalen Einheitskugel ist. Mit $|\mathbb{S}^{n-1}|$ bezeichnen wir die Oberfläche der $n-1$ dimensionalen Sphäre

$$\mathbb{S}^{n-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = 1 \right\}.$$

Es gilt

$$|\mathbb{S}^{n-1}| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Mit

$$S_{p,q}(\Omega, a, c) = \inf_{u \in K} \int_{\Omega} a |\nabla u|^p dx, \quad K = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \int_{\Omega} c |u|^q dx = 1 \right\}$$

bezeichnen wir (bis auf die Potenz $-1/p$) die beste Konstante für die Sobolev-Einbettung $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ mit den Gewichten $a \in C^1(\bar{\Omega})$ mit $a(x) > 0$ in $\bar{\Omega}$ und $c \in L^\infty(\Omega)$ mit $c(x) > 0$ in $\bar{\Omega}$.

Dank

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Institut der Universität Basel. Ich bin Frau Prof. Dr. C. Bandle zu grossem Dank verpflichtet: zum einen für die interessante Themenstellung, nicht zuletzt aber auch für ihre intensive Betreuung. Sie hat sich immer die Zeit genommen, meine Arbeit durch Ratschläge und wissenschaftliche Gespräche zu unterstützen.

Beim Korreferent Prof. Dr. M. Plum bedanke ich mich für das Interesse an der Arbeit. Dank dem er die Arbeit sorgfältigen gelesen hat, konnten viele Verbesserungen und Korrekturen gemacht werden.

Herrn Prof. Dr. L.B. Peletier danke ich für seine freundliche Einladung zu einem einwöchigen Aufenthalt an der Universität Leiden im September 2003.

Für die finanzielle Unterstützung bin ich dem Schweizerischen Nationalfonds (Projekt Nr. 2100-063791) zu Dank verpflichtet. Ebenso bedanke ich mich beim Mathematischen Institut der Universität Basel für die finanzielle Unterstützung.

Für die liebevolle Betreuung von meinem Sohn Jan Benjamin will ich meinen Eltern und Manuela Freyvogel danken. Sie haben mir damit wertvollen zusätzlichen Freiraum für meine Forschungsarbeit geschaffen. Ein ganz besonderer Dank gilt meiner Frau Joswitte. Sie hat es mir durch ihre Geduld und Unterstützung ermöglicht, diese Arbeit zu erstellen.

Kapitel 1

Allgemeine Existenzresultate

Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta_p u - b(x)u^{p-1} &= f(x, u) + c(x)u^{s-1} && \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &> 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

wobei mit Δ_p der gewichtete p -Laplace Operator mit $1 < p < n$

$$\Delta_p u := \operatorname{div}(a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

bezeichnet sei und $s = p^* = \frac{np}{n-p}$. An die Funktion b setzen wir voraus, dass ein $\gamma > 0$ existiert so, dass

$$\int_{\Omega} (a|\nabla\phi|^p - b|\phi|^p) dx \geq \gamma \int_{\Omega} a|\nabla\phi|^p dx \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.2}$$

Die Funktion $f(x, u)$ sei eine Störung mit niedriger Ordnung in dem Sinne, dass $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(x, u)/u^{s-1} = 0$ gleichmässig in x gilt. Zudem verlangen wir $f(x, 0) = 0$. Wir werden uns später auf $f(x, u) = \lambda d(x)u^{q-1}$ beschränken, wobei die meisten Resultate ebenfalls für $f(x, u) = \lambda g(x, u)$ leicht verallgemeinert werden können. Es sei $a(x) \in C^1(\Omega)$ mit $a(x) > 0$ in $\bar{\Omega}$ und $c(x) \in L^\infty(\Omega)$ mit $c(x) > 0$ in $\bar{\Omega}$. Das Gebiet Ω sei beschränkt, und der Rand $\partial\Omega$ sei genügend regulär so, dass schwache Lösungen von (1.1) auch starke Lösungen $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ sind. Um die Messbarkeit der zusammengesetzten Funktionen $g(x, u(x)) = b(x)u^{p-1} + f(x, u) + c(x)u^{s-1}$ sicherzustellen, setzen wir voraus, dass $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Caratheodory Funktion ist. Daher ist g messbar in $x \in \Omega$ und stetig in $u \in \mathbb{R}$. Die Werte von $f(x, u)$ für $u < 0$ sind irrelevant. Wir definieren daher $f(x, u) = 0$ für $x \in \Omega$ und $u \leq 0$. Mit $F(x, u) := \int_0^u f(x, s) ds$ sei die Stammfunktion von $f(x, u)$ bezeichnet.

Die Beweismethode für die Existenz von Lösungen hängt vom Wachstum

der Störung $f(x, \cdot)$ in null ab. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

$$\text{sublinear in } \mathbf{0}: \frac{f(x, u)}{u^{p-1}} \rightarrow 0 \text{ für } u \rightarrow 0^+, \text{ gleichmässig in } x, \quad (1.3a)$$

$$\text{linear in } \mathbf{0}: \frac{f(x, u)}{u^{p-1}} \rightarrow d > 0 \text{ für } u \rightarrow 0^+, \text{ gleichm. in } x, \quad (1.3b)$$

$$\text{superlinear in } \mathbf{0}: \frac{f(x, u)}{u^{p-1}} \rightarrow +\infty \text{ für } u \rightarrow 0^+, \text{ gleichm. in } x. \quad (1.3c)$$

1.1 Die lokale Palais-Smale-Bedingung

Definition 1.1 Eine Folge $\{u_m\}$ in einem Banachraum V nennen wir eine Palais-Smale-Folge für ein Fréchet-differenzierbares Funktional $E : V \rightarrow \mathbb{R}$, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. $E(u_m) \rightarrow C_0 \in \mathbb{R}$ für $m \rightarrow \infty$,
2. $DE(u_m) \rightarrow 0$ in V^* für $m \rightarrow \infty$,

wobei DE die Fréchet-Ableitung von E und V^* den Dualraum von V bezeichnet.

Mit dieser Definition kann die folgende Kompaktheitsbedingung formuliert werden:

Definition 1.2 Das Funktional E erfüllt

1. die Palais-Smale-Bedingung, falls gilt:

Jede Palais-Smale-Folge besitzt eine konvergente Teilfolge. (P.-S.)

2. die lokale Palais-Smale-Bedingung für ein β , falls gilt:

Jede Palais-Smale-Folge mit $C_0 < \beta$ besitzt eine konvergente Teilfolge. (P.-S.) $_{\beta}$

Schwache Lösungen von (1.1) sind kritische Punkte des Funktionals $\Psi : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\Psi(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{a(x)}{p} |\nabla u|^p - \frac{b(x)}{p} |u|^p - F(x, u) - \frac{c(x)}{s} |u|^s \right) dx.$$

Da die Einbettung $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^s(\Omega)$ für $s = p^*$ nicht kompakt ist, erfüllt das Funktional Ψ die Palais-Smale-Bedingung (P.-S.) im Allgemeinen nicht. Wir werden jedoch zeigen, dass das Funktional eine lokale Palais-Smale-Bedingung (P.-S.) $_{\beta}$ für ein gewisses $\beta \in \mathbb{R}$ erfüllt. Für den Beweis benötigen wir das Kompaktheits-Lemma von Lions [35]. Es sei hier der Vollständigkeit halber zitiert:

Lemma 1.3 (Lions) Sei $\{u_j\}$ eine schwach konvergente Folge in $W_0^{1,p}(\Omega)$ und u der Grenzwert so, dass

$$1. \ a(x)|\nabla u_j|^p \xrightarrow{*} \mu$$

$$2. \ c(x)|u_j|^{p^*} \xrightarrow{*} \nu,$$

schwach im Sinne der Masse, wobei μ, ν beschränkte nichtnegative Masse auf $\overline{\Omega}$ sind. Dann existieren eine höchstens abzählbare Menge $\{x_i\}_{i \in J} \subset \overline{\Omega}$ und positive Zahlen ν_i, μ_i so, dass

$$\nu = c(x)|u|^{p^*} + \sum_{i \in J} \nu_i \delta_{x_i}, \quad \nu_i > 0, \quad (1.4a)$$

$$\mu \geq a(x)|\nabla u|^p + \sum_{i \in J} \mu_i \delta_{x_i}, \quad \mu_i > 0, \quad (1.4b)$$

$$\mu_i \geq S_p \left(\inf_{x \in \Omega} \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right) \nu_i^{p/p^*} \quad (1.4c)$$

gilt, wobei δ_{x_i} das Diracmass in x_i bezeichnet.

Das Funktional Ψ erfüllt die folgende lokale Palais-Smale-Bedingung:

Lemma 1.4 Sei $\{v_j\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ eine Palais-Smale-Folge für das Funktional Ψ mit $\Psi(v_j) \rightarrow C_0$. Falls

$$C_0 < \beta = \frac{1}{n} S_p^{n/p} \left(\inf_{x \in \Omega} \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p} - K \quad (1.5)$$

mit

$$K = \sup_{v \geq 0} \int_{\Omega} \left(F(x, v) - \frac{1}{p} f(x, v) v - \frac{1}{n} c|v|^{p^*} \right) dx \geq 0$$

gilt, existiert eine konvergente Teilfolge $\{v_{j_k}\}$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Beweis: Sei $\|v\|^p = \int_{\Omega} a|\nabla v|^p dx$. Als erstes bemerken wir, dass die Palais-Smale-Folge $\{v_j\}$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ beschränkt ist:

$$\begin{aligned} C_0 + o(1)\|v_j\| &\geq \Psi(v_j) - \frac{1}{p} \langle D\Psi(v_j), v_j \rangle \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p} f(x, v_j) v_j - F(x, v_j) \right) dx + \frac{1}{n} \int_{\Omega} c|v_j|^{p^*} dx. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Aus der Voraussetzung $f(x, u) = o(u^{p^*-1})$ für $u \rightarrow \infty$ folgt: für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Konstante $C > 0$ so, dass

$$|f(x, u)| \leq \varepsilon c u^{p^*-1} + C \quad \text{für alle } u \geq 0 \quad (1.7a)$$

gilt und somit auch

$$|F(x, u)| \leq \frac{\varepsilon}{p^*} c u^{p^*} + C u \quad \text{für alle } u \geq 0. \quad (1.7b)$$

Aus (1.6) und (1.7) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_{\Omega} c |v_j|^{p^*} dx &\leq \int_{\Omega} \left(F(x, v_j) - \frac{1}{p} f(x, v_j) v_j \right) dx + C_0 + o(1) \|v_j\| \\ &\leq \varepsilon C' \int_{\Omega} c |v_j|^{p^*} dx + (C'' + o(1)) \|v_j\| + C_0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

und somit für ein genügend kleines $\varepsilon > 0$:

$$\int_{\Omega} c |v_j|^{p^*} dx \leq C' + C'' \|v_j\|. \quad (1.9)$$

Für $\Psi(v_j)$ erhalten wir für zwei neue Konstanten $C', C'' > 0$

$$C_0 + o(1) = \Psi(v_j) \geq \frac{\gamma}{p} \|v_j\|^p - C' - C'' \|v_j\|$$

und daraus, dass $\{v_j\}$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ beschränkt ist.

Es existiert daher eine schwach konvergente Teilfolge in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Wegen dem Lemma 1.3 können wir eine Teilfolge mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} v_j &\rightharpoonup v \quad \text{schwach in } W_0^{1,p}(\Omega), \\ v_j &\rightarrow v \quad \text{stark in } L^r(\Omega), 1 < r < p^* \\ a(x) |\nabla v_j|^p &\xrightarrow{*} \mu \geq a(x) |\nabla v|^p + \sum_{i \in J} \mu_i \delta_{x_i} \\ c(x) |v_j|^{p^*} &\xrightarrow{*} \nu = c(x) |v|^{p^*} + \sum_{i \in J} \nu_i \delta_{x_i} \end{aligned} \quad (1.10)$$

wählen. Sei $x_k \in \bar{\Omega}$ im Träger des singulären Teils von ν, μ . Betrachte $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ so, dass

$$\varphi \equiv 1 \text{ in } B_\varepsilon(x_k), \quad \varphi \equiv 0 \text{ in } (B_{2\varepsilon}(x_k))^c, \quad |\nabla \varphi| \leq \frac{2}{\varepsilon} \quad (1.11)$$

gilt. Da $\{v_j\}$ beschränkt ist, folgt dies auch für $\{\varphi v_j\}$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Es gilt

daher

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \langle D\Psi(v_j), \varphi v_j \rangle \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{B_{2\varepsilon}(x_k)} \left(a|\nabla v_j|^{p-2} \nabla v_j \cdot \nabla(\varphi v_j) - b(x)|v_j|^p \varphi \right. \\
&\quad \left. - f(x, v_j) v_j \varphi - c|v_j|^{p^*} \varphi \right) dx \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\int_{B_{2\varepsilon}(x_k) \setminus B_\varepsilon(x_k)} a|\nabla v_j|^{p-2} v_j \nabla v_j \cdot \nabla \varphi dx + \underbrace{\int_{B_{2\varepsilon}(x_k)} a|\nabla v_j|^p \varphi dx}_{\rightarrow \int_{B_{2\varepsilon}(x_k)} \varphi d\mu} \right. \\
&\quad \left. - \int_{B_{2\varepsilon}(x_k)} (b|v_j|^p + f(x, v_j) v_j) \varphi dx - \underbrace{\int_{B_{2\varepsilon}(x_k)} c|v_j|^{p^*} \varphi dx}_{\rightarrow \int_{B_{2\varepsilon}(x_k)} \varphi d\nu} \right]. \tag{1.12}
\end{aligned}$$

Aus der Hölder-Ungleichung erhalten wir mit $\tilde{B}_\varepsilon = B_{2\varepsilon}(x_k) \setminus B_\varepsilon(x_k)$

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\tilde{B}_\varepsilon} a|\nabla v_j|^{p-2} v_j (\nabla v_j \cdot \nabla \varphi) dx \right| \\
&\leq \left(\int_{\tilde{B}_\varepsilon} a|\nabla v_j|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\tilde{B}_\varepsilon} a|v_j|^{p^*} dx \right)^{1/p^*} \left(\int_{\tilde{B}_\varepsilon} |\nabla \varphi|^n dx \right)^{1/n} \\
&\leq \underbrace{\left(\int_{\tilde{B}_\varepsilon} a|\nabla v_j|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\tilde{B}_\varepsilon} a|v_j|^{p^*} dx \right)^{1/p^*}}_{=o(1) \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ gleichmässig in } j} \underbrace{\frac{2}{\varepsilon} \left(\int_{\tilde{B}_\varepsilon} dx \right)^{1/n}}_{=C\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Es gilt daher

$$\left| \int_{\tilde{B}_\varepsilon} a|\nabla v_j|^{p-2} v_j (\nabla v_j \cdot \nabla \varphi) dx \right| = o(1) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ gleichmässig in } j$$

und somit folgt aus (1.12)

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{B_{2\varepsilon}(x_k)} \varphi d\mu + \int_{B_{2\varepsilon}(x_k)} \varphi d\nu + \int_{B_{2\varepsilon}(x_k)} (b|v|^p + f(x, v) v) \varphi dx \right] \\
&= \nu_k - \mu_k.
\end{aligned}$$

Aus der Ungleichung (1.4c) des Kompaktheits-Lemmas folgt:

$$\nu_k \geq S_p \left(\inf_{x \in \Omega} \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right) \nu_k^{p/p^*}.$$

Daher gilt entweder $\nu_k = 0$ oder

$$\nu_k \geq S_p^{n/p} \left(\inf_{x \in \Omega} \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p}. \tag{1.13}$$

Wir werden zeigen, dass Letzteres nicht möglich ist und nehmen im Widerspruch an, dass ein k_0 mit $\nu_{k_0} \neq 0$ existiert. Aus (1.10) und (1.13) folgt

$$\begin{aligned} C_0 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \Psi(v_j) \geq \Psi(v) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \nu_{k_0} \\ &\geq \Psi(v) + \frac{1}{n} S_p^{n/p} \left(\inf_{x \in \Omega} \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p}, \end{aligned}$$

wobei v den regulären Teil bezeichnet. Aus der Voraussetzung folgt

$$C_0 < \frac{1}{n} S_p^{n/p} \left(\inf_{x \in \Omega} \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p}$$

und somit $\Psi(v) < 0$. Im Speziellen ist daher $v \neq 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} C_0 &= \lim_{j \rightarrow \infty} (\Psi(v_j) - 1/p \langle D\Psi(v_j), v_j \rangle) \\ &\geq \Psi(v) - \frac{1}{p} \langle D\Psi(v), v \rangle + \frac{1}{n} \nu_{k_0} \\ &\geq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p} f(x, v) v - F(x, v) + \frac{1}{n} c|v|^{p^*} \right) dx + \frac{1}{n} S_p^{n/p} \left(\inf_{x \in \Omega} \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p} \\ &\geq \frac{1}{n} S_p^{n/p} \left(\inf_{x \in \Omega} \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p} - K, \quad \text{mit } 0 \leq K < \infty \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung (1.5). Es folgt $\nu_k = 0 \forall k$ und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} c|v_j|^{p^*} dx = \int_{\Omega} c|v|^{p^*} dx.$$

Mit (1.10) folgt $v_j \rightarrow v$ in L^{p^*} und wegen der Stetigkeit von $(\Delta_p \cdot)^{-1} : W_0^{-1, p'}(\Omega) \rightarrow W_0^{1, p}(\Omega)$ mit $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ (siehe Diaz [20]) folgt $v_j \rightarrow v$ in $W_0^{1, p}(\Omega)$. \square

Abschliessend betrachten wir das folgende Beispiel:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \lambda b(x)u^{q-1} &= c(x)u^{p^*-1} \quad \text{in } \Omega \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.14}$$

mit $a \in C^1(\bar{\Omega})$, $a(x) > 0$ in $\bar{\Omega}$, $b, c \in L^\infty(\Omega)$, $b(x), c(x) > 0$ in $\bar{\Omega}$, $\lambda \geq 0$ und $1 < q < p^*$. Mit $I_\lambda : W_0^{1, p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ sei das zugehörige Funktional

$$I_\lambda(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{a(x)}{p} |\nabla u|^p - \frac{\lambda b(x)}{q} |u|^q - \frac{c(x)}{p^*} |u|^{p^*} \right) dx$$

bezeichnet. Falls $q \geq p$ erhalten wir für die Konstante K aus dem Lemma 1.4:

$$K = \sup_{u \geq 0} \int_{\Omega} \left(\lambda \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) b |u|^q - \frac{1}{n} c |u|^{p^*} \right) dx = 0. \quad (1.15)$$

Für $q < p$ erhalten wir mit Hilfe der Hölder-Ungleichung

$$K \leq \sup_{v \geq 0} \left[\lambda c_1 \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) \left(\int_{\Omega} c |v|^{p^*} dx \right)^{q/p^*} - \frac{1}{n} \int_{\Omega} c |v|^{p^*} dx \right].$$

Sei $f(t) = \lambda c_2 t^q - c_3 t^{p^*}$. Diese Funktion nimmt für $t > 0$ das Maximum bei $t_0 = \left(\frac{\lambda c_2 q}{p^* c_3} \right)^{1/(p^*-q)}$ an. Es gilt daher

$$f(t) \leq f(t_0) = \lambda c_2 \left(\frac{c_2 q \lambda}{c_3 p^*} \right)^{q/(p^*-q)} - c_3 \left(\frac{c_2 q \lambda}{c_3 p^*} \right)^{p^*/(p^*-q)}.$$

Für $q < p$ erhalten wir somit die Abschätzung

$$K \leq \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right)^{\frac{p^*}{p^*-q}} \left(1 - \frac{q}{p^*} \right) \left(\frac{q n}{p^*} \right)^{\frac{q}{p^*-q}} c_1^{\frac{p^*}{p^*-q}} \lambda^{\frac{p^*}{p^*-q}}.$$

Im Spezialfall $a = \rho^{n-p}$ und $b = c = \rho^n$ mit $\rho(x) > 0$ erhalten wir für die lokale Palais-Smale-Bedingung $(P.-S.)_{\beta}$ für das Funktional I_{λ} die folgenden kritischen Niveaus β :

1. Für $p \leq q < p^*$: $C_0 < \beta = \frac{1}{n} S_p^{n/p}$,
2. und für $1 < q < p$: $C_0 < \beta = \frac{1}{n} S_p^{n/p} - K$, mit

$$K \leq \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right)^{\frac{p^*}{p^*-q}} \left(1 - \frac{q}{p^*} \right) \left(\frac{q n}{p^*} \right)^{\frac{q}{p^*-q}} \left(\int_{\Omega} \rho^n dx \right)^{\frac{p^*}{p^*-q}} \lambda^{\frac{p^*}{p^*-q}}. \quad (1.16)$$

1.2 Allgemeines sublineares Problem

Im folgenden Existenzsatz übertragen wir den Beweis von Brezis und Nirenberg [13] auf das Problem (1.1). Wir nehmen an, dass die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

$$b \in L^{\infty}(\Omega), \text{ wobei (1.2) erfüllt sei,} \quad (1.17a)$$

$$f(x, u) = o(u^{p-1}) \text{ für } u \rightarrow 0^+, \text{ gleichmässig in } x, \quad (1.17b)$$

$$f(x, u) = o(u^{p^*-1}) \text{ für } u \rightarrow +\infty, \text{ gleichmässig in } x. \quad (1.17c)$$

Für den Beweis des Existenzsatzes verwenden wir eine spezielle Version des Mountainpass-Lemmas von Ambrosetti und Rabinowitz (vergleiche [13] Theorem 2.2):

Lemma 1.5 (Ambrosetti, Rabinowitz) Sei Φ ein C^1 -Funktional auf einem Banachraum V . Es existiere eine Umgebung U von 0 in V und eine Konstante $\rho > 0$ so, dass $\Phi(0) < \rho$ und $\Phi(u) \geq \rho$ für jedes u auf ∂U ist. Zudem sei $\Phi(v) < \rho$, für ein geeignetes $v \notin U$. Sei

$$c_0 = \inf_{P \in \mathcal{P}} \max_{w \in P} \Phi(w) \geq \rho,$$

wobei \mathcal{P} die Klasse der stetigen Wege von 0 nach v bezeichnet. Dann existiert eine Palais-Smale-Folge $\{u_j\}$ in V mit $\Phi(u_j) \rightarrow c_0$.

Es gilt der Existenzsatz:

Satz 1.6 Falls ein $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $v_0 \geq 0$ in Ω und $v_0 \not\equiv 0$ existiert so, dass

$$\sup_{t \geq 0} \Psi(tv_0) < \frac{1}{n} \left(\inf_{\Omega} \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p} S_p^{n/p} \quad (1.18)$$

gilt, dann existiert für das Problem (1.1) unter den Voraussetzungen (1.2) und (1.17) eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Beweis: Da sowohl $b(x)$ wie auch $f(x, u)$ für gewisse $x \in \Omega$ negativ sein können, führen wir im Funktional Ψ einen zusätzlichen Term ein: Unter den Voraussetzungen (1.17) können wir eine Konstante $\mu \geq 0$ so wählen, dass

$$-b(x)u^{p-1} - f(x, u) \leq \mu u^{p-1} + c u^{p^*-1} \quad \text{für fast alle } x \in \Omega \text{ und } \forall u \geq 0 \quad (1.19)$$

gilt. Auf $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ definieren wir

$$\begin{aligned} \Phi(u) = \int_{\Omega} & \left(\frac{1}{p} (a(x)|\nabla u|^p + \mu|u|^p) - \frac{b(x)}{p} (u^+)^p - F(x, u^+) \right. \\ & \left. - \frac{\mu}{p} (u^+)^p - \frac{c(x)}{p^*} (u^+)^{p^*} \right) dx, \end{aligned}$$

wobei

$$u^+ = \begin{cases} u(x) & \text{für } u(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Falls $b(x), f(x, u) \geq 0$ für alle $u \geq 0$ gilt, kann $\mu = 0$ gewählt werden.

In einem ersten Schritt zeigen wir mit Hilfe des Mountainpass-Lemmas 1.5, dass eine Palais-Smale-Folge $\{u_j\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $\Phi(u_n) \rightarrow c_0$ für $n \rightarrow \infty$ existiert. Das Funktional Φ ist C^1 auf $W_0^{1,p}(\Omega)$. Um das Mountainpass-Lemma 1.5 anzuwenden, ist noch zu zeigen, dass eine Umgebung U von 0 in $W_0^{1,p}(\Omega)$ und eine Konstante $\rho > 0$ existiert so, dass $\Phi(0) < \rho$ und $\Phi(u) \geq \rho$ für jedes u auf ∂U ist. Zudem müssen wir ein $v \notin U$ mit $\Phi(v) < \rho$ finden.

Die Bedingung $\Phi(0) < \rho$ folgt sofort aus $F(x, 0) = 0$. Aus der Voraussetzung (1.17b) folgt: Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$f(x, u) \leq \varepsilon u^{p-1} \quad \text{für } 0 \leq u \leq \delta.$$

Aus der Voraussetzung (1.17c) erhalten wir

$$f(x, u) \leq \varepsilon u^{p-1} + C(\varepsilon)u^{p^*-1} \quad \forall u \geq 0.$$

Folglich haben wir

$$F(x, u) \leq \frac{\varepsilon}{p}u^p + \frac{C}{p^*}u^{p^*} \quad \text{für fast alle } x \in \Omega \text{ und } \forall u \geq 0.$$

Für das Funktional erhalten wir aus (1.2) und der obigen Abschätzung

$$\begin{aligned} \Phi(u) &\geq \int_{\Omega} \left(\frac{a}{p} |\nabla u|^p - \frac{b}{p} (u^+)^p - \frac{\varepsilon}{p} (u^+)^p - \frac{C + c(x)}{p^*} (u^+)^{p^*} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p} (a |\nabla u^-|^p + a |\nabla u^+|^p - b (u^+)^p) - \frac{\varepsilon}{p} (u^+)^p - \frac{C'}{p^*} (u^+)^{p^*} \right) dx \\ &\geq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p} (a |\nabla u^-|^p + \gamma a |\nabla u^+|^p) - \frac{\varepsilon}{p} (u^+)^p - \frac{C'}{p^*} (u^+)^{p^*} \right) dx. \end{aligned}$$

Aus der Sobolev-Ungleichung folgt

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{p} \|u^-\|^p + \frac{\gamma - C\varepsilon}{p} \|u^+\|^p - \frac{C'}{p^*} \|u^+\|^{p^*},$$

wobei $\|u\|^p = \int_{\Omega} a |\nabla u|^p dx$. Für ein genügend kleines $\varepsilon > 0$ folgt die Existenz einer Konstante $k > 0$ und $C > 0$ so, dass

$$\Phi(u) \geq k \|u\|_{W_0^{1,p}}^p - C \|u\|_{W_0^{1,p}}^{p^*} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Es existiert daher für eine kleine Kugel $U \subset W_0^{1,p}$ um 0 ein $\rho > 0$ so, dass $\Phi(u) \geq \rho$ für $u \in \partial U$. Andererseits gilt für ein beliebiges $u \in W_0^{1,p}$ mit $u \geq 0$ und $u \not\equiv 0$ aufgrund der Voraussetzung (1.17c) $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(tu) = -\infty$. Wir können daher $v = t_0 v_0$ setzen, für ein ausreichend grosses $t_0 > 0$ so, dass $\Phi(t_0 v_0) < \rho$ gilt. Aus dem Mountainpass-Lemma 1.5 und der Voraussetzung (1.18) erhalten wir die Existenz einer Palais-Smale-Folge $\{u_j\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \Phi(u_j) = c_0 &= \inf_{P \in \mathcal{P}} \max_{w \in P} \Phi(w) \leq \sup_{t \geq 0} \Phi(tv_0) \\ &< \frac{1}{n} \left(\inf_{\Omega} \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p} S_p^{n/p} = \beta. \end{aligned}$$

Da nach dem Lemma 1.4 das Funktional Φ für das oben definierte β (mit $K = 0$ für $q \geq p$, siehe (1.15)) die lokale Palais-Smale-Bedingung (P.-S.) $_{\beta}$ erfüllt, folgt die Existenz einer nichttrivialen Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$-\Delta_p u + \mu |u|^{p-2} u = \mu (u^+)^{p-1} + b (u^+)^{p-1} + f(x, u^+) + c (u^+)^{p^*-1}. \quad (1.20)$$

Aus der Ungleichung (1.19) folgt, dass die rechte Seite von (1.20) positiv ist. Aus dem schwachen Maximumprinzip für den p -Laplace-Operator folgt $u \geq 0$. Unter den Voraussetzungen: das Gebiet sei genügend glatt berandet und $f(x, \cdot)$ ist stetig, folgt $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ (siehe de Thélin [18], Diaz [20]). Somit folgt aus dem starken Maximumprinzip (für nichtlineare p -Laplace-Probleme siehe Diaz [20], sowie Gilbarg und Trudinger [28]), dass $u > 0$ in Ω ist und daher der Gleichung

$$-\Delta_p u - b(x)u^{p-1} = f(x, u) + c(x)u^{p^*-1}$$

genügt. Es folgt die Behauptung. □

Der Satz 1.6 lässt sich auf das Parameter abhängige in null sublineare Problem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - b(x)u^{p-1} &= \lambda f(x, u) + c(x)u^{p^*-1} & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &> 0 & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.21)$$

anwenden, wobei $f(x, u) > 0$ für $u > 0$ sei. Ferner sei für $u \leq 0$ wiederum $f(x, u) = 0$.

Satz 1.7 *Unter den Voraussetzungen (1.2) und (1.17) existiert ein λ^* so, dass für alle $\lambda > \lambda^*$ das Problem (1.21) eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ hat.*

Beweis: Sei $v_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $v_0(x) \geq 0$, $v_0(0) = 1$ und $\int_\Omega c|v_0|^{p^*} dx = 1$, dann haben wir

$$\begin{aligned} \Psi(tv_0) &= \int_\Omega \left(\frac{t^p}{p}(a|\nabla v_0|^p - b v_0^p) - \lambda F(x, tv_0) - \frac{c}{p^*} t^{p^*} |v_0|^{p^*} \right) dx \\ &= t^p \frac{1}{p} \underbrace{\int_\Omega (a|\nabla v_0|^p - b v_0^p) dx}_{=: A > 0} - \lambda \int_\Omega F(x, tv_0) dx - t^{p^*} \frac{1}{p^*}. \end{aligned}$$

Wir behaupten, dass

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq 0} \Psi(tv_0) = 0 \quad (1.22)$$

gilt und somit die Bedingung (1.18) für ein genügend grosses λ erfüllt ist.

Für ein festes λ gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(tv_0) = -\infty$. Daher wird das Supremum für ein t_λ angenommen. Für dieses gilt

$$t_\lambda^{p-1} A - t_\lambda^{p^*-1} - \lambda \int_\Omega f(x, t_\lambda v_0) v_0 dx = 0 \quad (1.23)$$

und somit $t_\lambda \leq A \frac{n-p}{p^2}$. Es folgt, dass

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} t_\lambda = 0.$$

Ansonsten können wir eine Teilfolge $t_{\lambda_j} \rightarrow \ell > 0$, mit $\lambda_j \rightarrow \infty$ finden. Die Gleichung (1.23) liefert dann $\int_\Omega f(x, \ell v_0) v_0 dx = 0$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu der Voraussetzung an f .

Es gilt

$$\sup_{t \geq 0} \Psi(tv_0) \leq t_\lambda^p \frac{A}{p} - t_\lambda^{p^*} \frac{1}{p^*}.$$

Das Funktional Ψ ist in λ für ein festes v monoton fallend. Somit folgt aus (1.22) und dem Satz 1.6 die Behauptung. \square

1.3 Allgemeines superlineares Problem

Wir betrachten das leicht modifizierte Problem (1.1):

$$\begin{aligned} -\Delta_p u - b(x)u^{p-1} &= \lambda f(x, u) + c(x)u^{p^*-1} && \text{in } \Omega \\ u &> 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.24}$$

wobei $f(x, u) \geq 0$, $f \not\equiv 0$ und superlinear in u für $x \in \Omega$ sei. Es gilt daher

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(x, u)}{u^{p-1}} = +\infty, \quad \text{gleichmässig in } x.$$

Die Bedingung (1.2) sei ebenfalls erfüllt.

Der Satz 1.6 kann nicht direkt angewendet werden, da die triviale Lösung für $\lambda > 0$ im Gegensatz zu den Problemen mit einer linearen oder sublinearen Störung kein lokales Minimum ist. Für die Konstruktion einer Lösung lassen wir uns von der Arbeit von Azorero und Alonso [24] inspirieren, wobei diese mit Hilfe eines Mountainpass-Lemmas die Existenz von mehrfachen (vorzeichenwechselnden) Lösungen bewiesen. Da wir an positiven Lösungen interessiert sind, verwenden wir an der Stelle das Variationsprinzip von Ekeland.

1.3.1 Minimierer eines abgeschnittenen Funktionals

Im Folgenden spezialisieren wir das Problem. Sei $b(x) \equiv 0$ in (1.24), und für $f(x, u)$ schreiben wir $f(x, u) = b(x) u^{q-1}$ für ein neues $b > 0$ in $\bar{\Omega}$ mit $1 < q < p$. Das zugehörige Funktional ist gegeben durch

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \left(\frac{a(x)}{p} |\nabla u|^p - \frac{\lambda b(x)}{q} |u|^q - \frac{c(x)}{p^*} |u|^{p^*} \right) dx \quad \text{für } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Mit $\|u\|$ sei die gewichtete Sobolev-Norm $\|u\|^p = \int_{\Omega} a(x)|\nabla u|^p dx$ bezeichnet. Es gilt

$$\begin{aligned} I_{\lambda}(u) &\geq \frac{1}{p} \int_{\Omega} a|\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{q} S_{p,q}(\Omega, a, b)^{-q/p} \left(\int_{\Omega} a|\nabla u|^p dx \right)^{q/p} \\ &\quad - \frac{1}{p^*} S_{p,p^*}(\Omega, a, c)^{-p^*/p} \left(\int_{\Omega} a|\nabla u|^p dx \right)^{p^*/p} \\ &= \frac{1}{p} \|u\|^p - \frac{\lambda}{q} S_{p,q}(\Omega, a, b)^{-q/p} \|u\|^q - \frac{1}{p^*} S_{p,p^*}(\Omega, a, c)^{-p^*/p} \|u\|^{p^*}. \end{aligned}$$

Definiere

$$h(t) = \frac{1}{p} t^p - \frac{\lambda}{q} S_{p,q}(\Omega, a, b)^{-q/p} t^q - \frac{1}{p^*} S_{p,p^*}(\Omega, a, c)^{-p^*/p} t^{p^*},$$

dann gilt $I_{\lambda}(u) \geq h(\|u\|)$. Es existiert ein $\tilde{\lambda}_0$ so, dass $h(t)$ ein positives Maximum für $t > 0$ und $0 < \lambda \leq \tilde{\lambda}_0$ hat. Sei $R_0 := \min\{t > 0 : h(t) \geq 0\}$ und $R_1 := \max\{t > 0 : h(t) \geq 0\}$ (siehe Abbildung 1.1). Mit diesen Grössen definieren wir die folgende Abschneidefunktion $\tau \in C^{\infty}$:

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{R}^+ &\rightarrow [0, 1] \quad \text{fallend} \\ \tau(t) &\equiv 1 \quad \text{falls } t \leq R_0 \\ \tau(t) &\equiv 0 \quad \text{falls } t \geq R_1. \end{aligned} \tag{1.25}$$

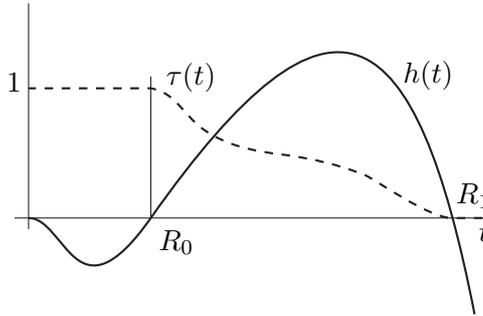


Abbildung 1.1: Untere Schranke $h(t)$ für I_{λ} und die Abschneidefunktion $\tau(t)$.

Wir betrachten nun das abgeschnittene Funktional

$$J_{\lambda}(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} a|\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{q} \int_{\Omega} b|u|^q dx - \frac{\tau(\|u\|)}{p^*} \int_{\Omega} c|u|^{p^*} dx. \tag{1.26}$$

Wie für I_{λ} gilt auch $J_{\lambda}(u) \geq \bar{h}(\|u\|)$, mit

$$\bar{h}(t) = \frac{1}{p} t^p - \frac{\lambda}{q} S_{p,q}(\Omega, a, b)^{-q/p} t^q - \frac{1}{p^*} S_{p,p^*}(\Omega, a, c)^{-p^*/p} t^{p^*} \tau(t).$$

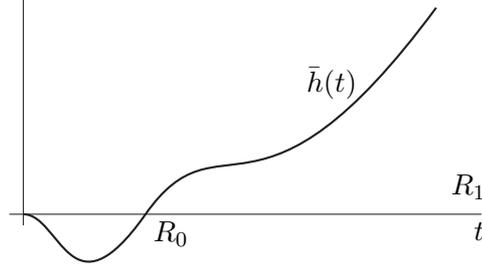


Abbildung 1.2: Untere Schranke $\bar{h}(t)$ für J_λ

Insbesondere gilt $\bar{h} = h$ für $t \leq R_0$, und für $t \geq R_1$ ist \bar{h} gegeben durch

$$\bar{h}(t) = \frac{1}{p}t^p - \frac{\lambda}{q}S_{p,q}(\Omega, a, b)^{-q/p}t^q.$$

Für das Funktional J_λ gilt $J_\lambda \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$. Aus der Konstruktion von J_λ folgt: Falls $J_\lambda(u) < 0$ gilt, folgt $\|u\| < R_0$ und $I_\lambda(v) = J_\lambda(v) \forall v$ in einer genügend kleinen Umgebung von u . Aus dem Lemma 1.4 folgt, dass das Funktional J_λ der lokalen Palais-Smale-Bedingung (P.-S.) $_\beta$ mit

$$\beta = \frac{1}{n}S_p^{n/p} \left(\inf_{x \in \Omega} \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p} - K$$

genügt, wobei aus (1.16) $K \leq \tilde{K}\lambda^{\frac{p^*}{p^*-q}}$ mit $\tilde{K} > 0$ folgt. Sei $\lambda_0 > 0$ so, dass $\lambda_0 \leq \tilde{\lambda}_0$ und für $0 < \lambda < \lambda_0$ erfülle das Funktional J_λ die lokale Palais-Smale-Bedingung für $\beta = 0$. Aus dem Variationsprinzip von Ekeland (siehe Struwe [41, Chapter I.5]) erhalten wir eine minimierende Folge $\{u_m\}$ so, dass $DJ_\lambda(u_m) \rightarrow 0$ in $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$ für $m \rightarrow \infty$ gilt. Aus der Palais-Smale-Bedingung folgt, dass die Folge $u_m \rightarrow u_0$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ für $m \rightarrow \infty$ konvergiert. Wir erhalten somit einen Minimierer u_0 für J_λ . Da per Konstruktion $J_\lambda(u_0) < 0$ gilt, ist u_0 ein Minimierer des Funktionals I_λ . Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1.8 *Es existiert ein $\lambda_0 > 0$ so, dass für $0 < \lambda < \lambda_0$ das Funktional I_λ in $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ein lokales Minimum hat. Es gilt*

$$I_\lambda(u_0) = C_0 < 0.$$

Bemerkung 1.9

1. Der Minimierer u_0 ist positiv: Es gilt $C_0 = \inf I_\lambda(u_0)$. Dann gilt auch $C_0 = I_\lambda(|u_0|)$. Mit dem Stampachia-Maximumprinzip folgt, dass $|u_0| \in W_0^{1,p}$ und u_0 strikt positiv in Ω ist.

2. Für das superlineare Funktional kann mit Hilfe einer Abschneidefunktion ein nach unten beschränktes Funktional konstruiert werden. Für dieses erhält man mit dem Variationsprinzip von Ekeland eine Palais-Smale-Folge. Im sublinearen Fall erhielten wir diese aus dem Mountainpass-Lemma 1.5. —

1.3.2 Verallgemeinerung der Ambrosetti-Brezis-Cerami Bedingung für die Konstruktion einer zweiten Lösung

Wir betrachten an Stelle des Funktionals I_λ das Funktional $I_\lambda^+ : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch:

$$I_\lambda^+(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{a(x)}{p} |\nabla u|^p - \frac{\lambda b(x)}{q} (u^+)^q - \frac{c(x)}{p^*} (u^+)^{p^*} \right) dx.$$

Lemma 1.10 *Für alle $v \in B_\varepsilon(u_0) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt:*

$$I_\lambda^+(v) \geq I_\lambda(v) \geq I_\lambda(u_0) = I_\lambda(u_0),$$

wobei u_0 die im Satz 1.8 konstruierte Lösung ist. □

Das Funktional I_λ^+ erfüllt die folgende Palais-Smale-Bedingung:

Lemma 1.11 *Sei $\lambda > 0$ genügend klein und u_0 ein lokales Minimum von I_λ mit $C_0 = I_\lambda(u_0) < 0$. Dann erfüllt I_λ^+ die $(P.-S.)_\beta$ -Bedingung mit*

$$\beta = C_0 + \frac{1}{n} S_p^{n/p} \left(\inf_x \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p}.$$

Beweis: Analog zu Lemma 1.4 folgt, dass die Palais-Smale-Folge $\{u_j\}$ beschränkt ist. Somit existiert eine schwachkonvergente Teilfolge $u_j \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Wegen dem Kompaktheits-Lemma 1.3 können wir eine Teilfolge mit den Eigenschaften (1.10) wählen. Wie im Lemma 1.4 folgt entweder

$$\mu_i = 0 \quad \text{oder} \quad \mu_i \geq S_p^{n/p} \left(\inf_x \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p}, \quad \text{für } i \in J$$

beziehungsweise

$$\nu_i = 0 \quad \text{oder} \quad \nu_i \geq S_p^{n/p} \left(\inf_x \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p}, \quad \text{für } i \in J.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
C_0 + \frac{1}{n} S_p^{n/p} \left(\inf_x \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p} &> C_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} I_\lambda^+(u_j) \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} I_\lambda^+(u_j) - \frac{1}{p^*} \langle DI_\lambda^+(u_j), u_j \rangle \\
&= \frac{1}{n} \int_\Omega a |\nabla u|^p dx - \lambda \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*} \right) \int_\Omega b (u^+)^q dx \\
&\geq \frac{1}{n} \int_\Omega a |\nabla u|^p dx - \lambda \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*} \right) \int_\Omega b |u|^q dx \\
&\geq \frac{1}{n} \int_\Omega a |\nabla u|^p dx - \lambda \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*} \right) S_{p,q}(\Omega, a, b)^{-q/p} \left(\int_\Omega a |\nabla u|^p dx \right)^{q/p},
\end{aligned}$$

wobei u der schwache Grenzwert der Folge u_j sei. Für den Minimierer gilt $I_\lambda^+(u_0) = C_0 < 0$. Daraus folgt

$$\frac{1}{n} \|u\|^p - \lambda \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*} \right) S_{p,q}(\Omega, a, b)^{-q/p} \|u\|^q < \frac{1}{n} S_p^{n/p} \left(\inf_x \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p},$$

wobei $\|u\| = \left(\int_\Omega a |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}$. Aus der Voraussetzung $1 < q < p$ erhalten wir die Abschätzung

$$\|u\| < \alpha(\lambda) S_p^{n/p^2} \left(\inf_x \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p^2}, \quad (1.27)$$

wobei $\alpha(\lambda) \rightarrow 1$ für $\lambda \rightarrow 0$ gilt. Sei $g(t) = I_\lambda^+(t \frac{u}{\|u\|})$ für $\|u\| \neq 0$ und $g \equiv 0$ für $\|u\| = 0$, daher

$$\begin{aligned}
g(t) &= \frac{t^p}{p} - \frac{\lambda t^q}{q \|u\|^q} \int_\Omega b(x) (u^+)^q dx - \frac{t^{p^*}}{p^* \|u\|^{p^*}} \int_\Omega c(x) (u^+)^{p^*} dx, \\
g'(t) &= t^{p-1} - \frac{\lambda t^{q-1}}{\|u\|^q} \int_\Omega b(x) (u^+)^q dx - \frac{t^{p^*-1}}{\|u\|^{p^*}} \int_\Omega c(x) (u^+)^{p^*} dx.
\end{aligned}$$

Es gelten die beiden Eigenschaften:

1. Für den regulären Teil von u ist $g'(\|u\|) = \langle DI_\lambda^+(u), u/\|u\| \rangle \leq 0$:

Sei $\psi = 1 - \varphi$ mit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und

$$\varphi \equiv 1 \text{ in } B_\varepsilon(x_k), \quad \varphi \equiv 0 \text{ in } B_{2\varepsilon}(x_k)^c, \quad |\varphi| \leq 1, \quad |\nabla \varphi| \leq \frac{2}{\varepsilon},$$

wobei $x_k \in \overline{\Omega}$ im Träger des singulären Teils von ν, μ sei. Dann erhalten wir aus den Eigenschaften (1.10)

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} \psi d\mu - \lambda \int_{\Omega} \psi(u^+)^q dx - \int_{\Omega} \psi d\nu \right) \\ &\geq \int_{\Omega} a |\nabla u|^p dx - \lambda \int_{\Omega} (u^+)^q dx - \int_{\Omega} (u^+)^{p^*} dx \\ &= \langle DI_{\lambda}^+(u), u \rangle. \end{aligned}$$

die Behauptung.

2. $g(\|u\|) = I_{\lambda}^+(u) \geq h(\|u\|)$, wobei

$$h(t) = \frac{1}{p} t^p - \frac{\lambda}{q} S_{p,q}(\Omega, a, b)^{-q/p} t^q - \frac{1}{p^*} S_{p,p^*}(\Omega, a, c)^{-p^*/p} t^{p^*},$$

wie anfangs Kapitel 1.3.1 definiert sei.

Für $h(t)$ gilt

$$\begin{aligned} h\left(\alpha(\lambda) S_p^{n/p^2} \left(\inf_x \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p^2}\right) &= \frac{1}{p} \alpha(\lambda)^p S_p^{n/p} \left(\inf_x \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p} \\ &\quad - \frac{\lambda}{q} S_{p,q}(\Omega, a, b)^{-q/p} \alpha(\lambda)^q S_p^{nq/p^2} \left(\inf_x \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{nq/p^2} \\ &\quad - \frac{1}{p^*} S_{p,p^*}(\Omega, a, c)^{-p^*/p} \alpha(\lambda)^{p^*} S_p^{n p^*/p^2} \left(\inf_x \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n p^*/p^2}. \end{aligned}$$

Für $\lambda \rightarrow 0$ erhalten wir:

$$h\left(\alpha(\lambda) S_p^{n/p^2} \left(\inf_x \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p^2}\right) \geq \frac{1}{n} S_p^{n/p} \left(\inf_x \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p} > 0.$$

Wir erhalten somit für ein genügend kleines λ

$$h\left(\alpha(\lambda) S_p^{n/p^2} \left(\inf_x \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p^2}\right) > 0.$$

Sei $A = \{t \geq 0 : g'(t) \leq 0\}$ und mit A_1 bezeichnen wir die Komponente von A , die $t = 0$ enthält. Der Bereich von A mit $g(t) \geq 0$ sei mit A_2 bezeichnet. Aus (1.27) und den beiden Eigenschaften von g folgt $\|u\| \in A_1 \cup A_2$ und insbesondere

$$I_{\lambda}^+(u) = g(\|u\|) \geq C_0.$$

Unter der Annahme, dass ein nichttrivialer singulärer Anteil $\mu_{k_0}, \nu_{k_0} \neq 0$ existiert, erhalten wir den Widerspruch:

$$\begin{aligned} C_0 + \frac{1}{n} S_p^{n/p} \left(\inf_x \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p} &\leq I_\lambda^+(u) + \frac{1}{n} S_p^{n/p} \left(\inf_x \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p} \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} I_\lambda^+(u_j) < C_0 + \frac{1}{n} S_p^{n/p} \left(\inf_x \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p}, \end{aligned}$$

wobei u den regulären Teil bezeichnet. Es folgt die Behauptung analog zu Lemma 1.4. \square

Aus $|\nabla u|^p = |\nabla u^+|^p + |\nabla u^-|^p$ folgt für alle $v \in \partial B_\varepsilon(u_0) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $\varepsilon > 0$ genügend klein:

$$I_\lambda^+(v) = \int_\Omega \left(\frac{a}{p} |\nabla v^+|^p + \frac{a}{p} |\nabla v^-|^p - \lambda \frac{b}{q} (v^+)^q - \frac{1}{p^*} c(u^+)^{p^*} \right) dx \geq \delta > C_0.$$

Das Funktional genügt daher den Voraussetzungen des Mountainpass-Lemmas 1.5, mit u_0 als strikt lokales Minimum. Aus dem obigen Lemma folgt die Konvergenz der Palais-Smale-Folge, falls ein Mountainpass mit subkritischem Niveau $C_1 < \beta$ existiert. Da das Maximum von h für $t > 0$ und $0 < \lambda \leq \lambda_0$ positiv ist, kann wegen $I_\lambda^+(u) \geq h(\|u\|)$ die triviale Lösung ausgeschlossen werden. Es kann die Verallgemeinerung der Ambrosetti-Brezis-Cerami Bedingung für die Konstruktion einer zweiten Lösung im folgenden Lemma zusammengefasst werden (vergleiche auch Azorero und Alonso [26] sowie Ambrosetti, Brezis und Cerami [2]):

Lemma 1.12 Falls ein $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gefunden werden kann, für das

$$\sup_{t>0} I_\lambda^+(u_0 + tv) < \beta = C_0 + \frac{1}{n} S_p^{n/p} \left(\inf_x \frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right)^{n/p} \quad (1.28)$$

gilt, existiert ein kritischer Punkt $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ für das Funktional I_λ^+ mit

$$C_0 < C_1 = \inf_{\gamma \in \mathcal{P}} \sup_{t \in [0,1]} I_\lambda^+(\gamma(t)),$$

wobei $\mathcal{P} = \{\gamma \in C([0,1], W_0^{1,p}(\Omega)) : \gamma(0) = u_0, \gamma(1) = u_0 + t_0 v\}$ mit $t_0 > 0$ genügend gross so, dass $I_\lambda^+(u_0 + t_0 v) < C_0$.

Die Bedingung (1.28) nachzuweisen ist im Allgemeinen schwierig. Unter geeigneten Voraussetzungen konnte sie für $a = b = c = 1$ nachgewiesen werden (siehe Azorero und Alonso [26]). Insofern ist das Lemma 1.12 nur eine Vorbereitung für einen Existenzbeweis einer zweiten Lösung für $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_0)$ zu verstehen.

1.4 Minimierung unter Nebenbedingung

Wir betrachten das Problem (1.1) mit $b \equiv 0$, und die Funktion $f(x, u)$ sei von der Form $f(x, u) = \lambda b(x) u^{q-1}$ für eine neue Funktion $b > 0$ in $\overline{\Omega}$, wobei $1 < q < p^*$ sei. Mit Hilfe des freien Funktionals I_λ erhielten wir in den vorhergehenden Kapiteln Existenzresultate. Ein alternativer Zugang verwendet den verallgemeinerten Rayleigh-Quotienten $Q : W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$Q_\mu(v) := \frac{\int_\Omega a |\nabla v|^p dx - \mu \int_\Omega b |v|^q dx}{\left(\int_\Omega c |v|^{p^*} dx\right)^{p/p^*}}.$$

Sei v ein Minimierer von Q_μ in $W_0^{1,p}(\Omega)$, dann folgt $DQ_\mu(v)\phi = 0$ für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned} DQ_\mu(v)\phi &= \frac{p \int_\Omega a |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \phi dx - \mu q \int_\Omega b |v|^{q-2} v \phi dx}{\left(\int_\Omega c |v|^{p^*} dx\right)^{p/p^*}} \\ &\quad - p \frac{\int_\Omega a |\nabla v|^p dx - \mu \int_\Omega b |v|^q dx}{\left(\int_\Omega c |v|^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}+1}} \int_\Omega c |v|^{p^*-2} v \phi dx = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$\int_\Omega a |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \phi dx - \mu \frac{q}{p} \int_\Omega b |v|^{q-2} v \phi dx = K \int_\Omega c |v|^{p^*-2} v \phi dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

mit

$$K = \frac{\int_\Omega a |\nabla v|^p dx - \mu \int_\Omega b |v|^q dx}{\int_\Omega c |v|^{p^*} dx}.$$

Sei $u := K^{\frac{1}{p^*-p}} v$ und $\lambda := \mu \frac{q}{p} K^{\frac{(n-p)(p-q)}{p^2}}$, so erhalten wir:

$$\int_\Omega a |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi dx - \lambda \int_\Omega b |u|^{q-2} u \phi dx = \int_\Omega c |u|^{p^*-2} u \phi dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Bemerkung 1.13 Damit $u = K^{\frac{1}{p^*-p}} v$ mit $\lambda = \mu \frac{q}{p} K^{\frac{(n-p)(p-q)}{p^2}}$ eine Lösung unseres ursprünglichen Problems ist, muss $K > 0$ erfüllt sein und somit $Q_\mu(v) > 0$. ┌

Bemerkung 1.14 Für den Fall $q = p$ ist der Beweis mit Hilfe des freien Funktionals $I_\lambda(u)$ und dem Mountainpass-Lemma äquivalent zum Beweis mit Hilfe des Quotienten $Q_\mu(v)$. Es gilt $u = K^{\frac{1}{p^*-p}} v$ und $\lambda = \mu$. Siehe auch Struwe [41, Chapter III.2]. ┌

Sei

$$Q_\mu(\Omega) = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} Q_\mu(v).$$

Für alle $\mu \geq 0$ gilt $Q_\mu(\Omega) \leq S_{p,p^*}(a, c, \Omega)$. Im Allgemeinen wird $Q_\mu(\Omega)$ nicht angenommen. Ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Minimierers ist das folgende Lemma über konzentrierte Kompaktheit von Lions [35]:

Lemma 1.15 (Lions) *Sei Ω ein beschränktes Gebiet in \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Falls*

$$-\infty < c \leq Q_\mu(\Omega) < \inf_{x \in \Omega} \left(\frac{a(x)}{c(x)^{\frac{n-p}{n}}} \right) S_p$$

gilt, existiert ein $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $v > 0$ so, dass $Q_\mu(\Omega) = Q_\mu(v)$.

Für den Beweis sei an dieser Stelle der Einfachheit halber $p = 2$ und $a = b = c = 1$.

Beweis: Wir folgen dem Beweis von Brezis und Lieb [12]. Unter der Voraussetzung $Q_\mu(v) \geq c > -\infty$ für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ existiert das Infimum $Q_\mu(\Omega)$. Es bleibt zu zeigen, dass $Q_\mu(\Omega)$ angenommen wird. Sei $\{v_m\}$ eine Minimalfolge in $W_0^{1,2}(\Omega)$ für $Q_\mu(\Omega)$, mit $|v_m|_{L^{2^*}} = 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $v_m \geq 0$ gilt, da anderenfalls v_m durch $|v_m|$ ersetzt werden kann. Mit der Hölder-Ungleichung folgt

$$Q_\mu(v_m) = \int_{\Omega} |\nabla v_m|^2 dx - \mu \int_{\Omega} |v_m|^q dx \geq \int_{\Omega} |\nabla v_m|^2 dx - C.$$

Da $\{v_m\}$ in $W_0^{1,2}$ beschränkt ist, können wir eine Teilfolge wählen, wieder mit $\{v_m\}$ bezeichnet, so dass $v_m \rightharpoonup v$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$, $v_m \rightarrow v$ in $L^r(\Omega)$, $r < 2^*$ und $|v|_{L^{2^*}} \leq 1$ gilt. Nach dem Lemma von Lieb [12] gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|v_m|^{2^*} - |v_m - v|^{2^*}) dx &= \int_{\Omega} \int_0^1 \frac{d}{dt} (|v_m + (t-1)v|^{2^*}) dt dx \\ &= 2^* \int_0^1 \int_{\Omega} |v_m + (t-1)v|^{2^*-2} (v_m + (t-1)v) v dx dt \\ &\rightarrow 2^* \int_0^1 \int_{\Omega} t v |t v|^{2^*-2} v dx dt = \int_{\Omega} |v|^{2^*} dx \quad \text{für } m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

und

$$\int_{\Omega} |\nabla v_m|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla(v_m - v)|^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \quad \text{für } m \rightarrow \infty. \quad (1.29)$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}
 Q_\mu &= Q_\mu(v_m) + o(1) = \int_\Omega |\nabla(v_m - v)|^2 dx + \int_\Omega (|\nabla v|^2 - \mu|v|^q) dx + o(1) \\
 &\geq S_2 \left(\int_\Omega |v_m - v|^{2^*} dx \right)^{2/2^*} + Q_\mu \left(\int_\Omega |v|^{2^*} dx \right)^{2/2^*} + o(1) \\
 &\geq S_2 \int_\Omega |v_m - v|^{2^*} dx + Q_\mu \int_\Omega |v|^{2^*} dx + o(1) \\
 &\geq (S_2 - Q_\mu) \int_\Omega |v_m - v|^{2^*} dx + Q_\mu + o(1).
 \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $Q_\mu < S_2$ gilt, folgt $v_m \rightarrow v$ in $L^{2^*}(\Omega)$ und somit $v \in M = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : |u|_{L^{2^*}} = 1\}$. Wegen der schwachen Unterhalbstetigkeit der Norm in $W_0^{1,2}(\Omega)$ folgt

$$Q_\mu(v) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} Q_\mu(v_m) = Q_\mu.$$

Da $v \geq 0$ und $v \neq 0$ folgt aus dem starken Maximumprinzip (siehe Struwe [41, Theorem B.4]) $v > 0$ in Ω . □

Bemerkung 1.16 Der Beweis für $p \neq 2$ muss etwas anders geführt werden, da (1.29) für $p \neq 2$ nicht richtig ist. Ein alternativer Beweis ist in Guedda und Véron [29, Lemma 3.3] zu finden. □

Bemerkung 1.17 Die Voraussetzung $Q_\mu(\Omega) \geq c > -\infty$ ist für $\mu \leq 0$ und $1 < q < p^*$ immer erfüllt, da $Q_\mu(v) > 0$ für alle $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $v \neq 0$ gilt. Somit existiert das Infimum $Q_\mu(\Omega)$.

Wir betrachten im Folgenden den Fall $\mu > 0$. Unter der Voraussetzung $a, b > 0$ in $\bar{\Omega}$ existiert $\lambda_1 > 0$ mit

$$\int_\Omega a|\nabla\varphi|^p dx - \lambda_1 \int_\Omega b|\varphi|^p dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Aus der Sobolev-Ungleichung und der Hölder-Ungleichung erhalten wir somit für $Q_\mu(v)$

$$Q_\mu(v) \geq S_{p,p^*}(\Omega, a, c) \frac{\|v\|^p - \frac{\mu}{\lambda_1^{q/p}} C \|v\|^q}{\|v\|^p} = S_{p,p^*}(\Omega, a, c) \left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1^{q/p}} C \|v\|^{q-p} \right).$$

Für $q = p$ gilt $C = 1$. Es folgt $Q_\mu(\Omega) \geq 0$ für $\mu < \lambda_1$ und $Q_\mu(\Omega) \geq -c > -\infty, c \geq 0$ für $\mu \geq \lambda_1$. Für $q \neq p$ ist $Q_\mu(\Omega)$ nicht beschränkt, denn für $q > p$ folgt $Q_\mu(v) \rightarrow -\infty$ für $\|v\| \rightarrow \infty$ und für $q < p$ folgt $Q_\mu(v) \rightarrow -\infty$ für $\|v\| \rightarrow 0$. Das Minimieren des Quotienten $Q_\mu(v)$ funktioniert daher im Fall $\mu > 0$ nur für $q = p$. □

1.5 Zusammenfassung

Zusammenfassend können wir für das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta_p u - \lambda b(x) u^{q-1} &= c(x) u^{p^*-1} && \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &> 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.30}$$

mit $a \in C^1(\bar{\Omega})$, $a(x) > 0$ in $\bar{\Omega}$, $b, c \in L^\infty(\Omega)$, $b(x), c(x) > 0$ in $\bar{\Omega}$, $\lambda \geq 0$ und $1 < q < p^*$ die folgenden Existenzaussagen festhalten (siehe Abbildung auch 1.3), wobei für den linearen Fall auf die Arbeit von Egnell [21] verwiesen sei:

1. Für den superlinearen Fall $1 < q < p$: Es existiert ein Lösungspfad $\Gamma = \{(\lambda, u) : \lambda \in \mathbb{R}, u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ ist eine Lösung von (1.30)}\}$ aus null mit $\lambda \in (0, \lambda_0)$, bestehend aus den Minimierern eines abgeschnittenen Funktionals J_λ . Unter geeigneten Voraussetzungen existiert eine zweite Lösung für $\lambda \in (\lambda_{q < p}^*, \lambda_0)$.
2. Für den linearen Fall $q = p$: Es existiert ein Lösungspfad Γ aus dem kleinsten positiven Eigenwert λ_1 von $-\Delta_p$ mit Dirichlet-Randwert für $\lambda \in (\lambda_{p=q}^*, \lambda_1)$. Siehe Egnell [21, Theorem I].
3. Für den sublinearen Fall $p < q < p^*$: Es existiert ein Lösungspfad Γ aus unendlich mit $\lambda \in (\lambda_{q > p}^*, +\infty)$.

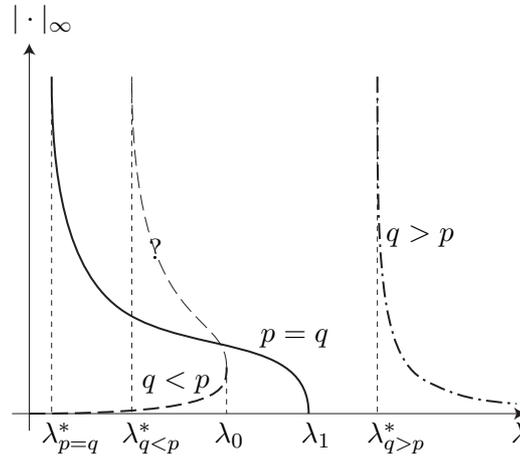


Abbildung 1.3: Für $q < p$ erhalten wir eine Verzweigung aus $\lambda = 0$, für $p = q$ aus $\lambda = \lambda_1$ und für $q > p$ aus $\lambda = +\infty$.

Kapitel 2

Das Brezis-Nirenberg-Problem auf der Sphäre

Im Folgenden werden wir uns auf das Brezis-Nirenberg-Problem auf der Sphäre konzentrieren. Das Brezis-Nirenberg-Problem hat seinen Ursprung im Yamabe Problem: *Gegeben sei eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) mit $n \geq 3$. Gesucht ist die Existenz einer konformen Metrik g' auf der Mannigfaltigkeit so, dass die skalare Krümmung R' konstant ist.* Dieses Problem führt uns zur nichtlinearen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{4(n-1)}{(n-2)} \Delta_g \varphi + R \varphi = R' \varphi^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Das Yamabe Problem sei als Motivation für die nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen aufzufassen, die wir diskutieren werden. Im Folgenden werden wir mit Hilfe der vorgestellten Methoden die Existenz von positiven Lösungen des Modell-Problems

$$-\Delta_p u - \lambda u^{q-1} = u^{p^*-1} \quad \text{in } \Omega' \subset \mathbb{S}^n$$

untersuchen. Mit Hilfe von numerischen Berechnungen untersuchen wir die Parameterabhängigkeit in λ, p und q . Die dabei verwendeten numerischen Methoden werden im Kapitel 3 vorgestellt.

Aus dem vorangegangenen Kapitel ist klar, dass die Abhängigkeit von q grundlegender Bedeutung sein wird. Das Problem nennen wir wiederum linear falls $q = p$, superlinear falls $q < p$ und sublinear falls $q > p$ gilt. Wir werden diese Fälle jeweils separat diskutieren, wobei wir das Problem für den Laplace-Beltrami-Operator ($p = 2$) und den p -Laplace-Beltrami-Operator (für $p \neq 2$) getrennt betrachten werden. In einem ersten Schritt beweisen wir ein allgemeines Existenz- und Nichtexistenzresultat. Das Nichtexistenz-

resultat beinhaltet eine Antwort auf ein offenes Problem der Arbeit von Bandle et. al. [6].

2.1 Stereographische Projektion und geodätische Koordinaten

Mit \mathbb{S}^n bezeichnen wir die n -dimensionale Sphäre:

$$\mathbb{S}^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2} = 1 \right\}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $X = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ der Nordpol, und $Y = (0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{S}^n$ sei der Südpol. Sei Φ eine stereographische Abbildung, gegeben durch

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{S}^n & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ y & \mapsto x = \left(\frac{y^i}{1+y^{n+1}} \right)_{i=1, \dots, n}. \end{cases}$$

Dann ist die Sphäre $\hat{\mathbb{S}}^n = \mathbb{S}^n \setminus \{Y\}$ konform zum euklidischen Raum \mathbb{R}^n . Die Metrik $g_{ij} = \rho^2 \delta_{ij}$ ist gegeben durch

$$\rho(x) = \frac{2}{1 + |x|^2}$$

und (\mathbb{R}^n, g) ist eine Repräsentation des $\hat{\mathbb{S}}^n$. Das sphärische Volumenelement ist gegeben durch

$$dV = \sqrt{g} dx = \rho^n dx.$$

Gebiete auf der Sphäre \mathbb{S}^n werden wir im Allgemeinen mit Ω' bezeichnen. Mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir die stereographische Projektion von Ω' (siehe Abbildung 2.1).

Mit der Notation der Einsteinschen Summenkonvention erhalten wir für den Laplace-Beltrami-Operator das Dirichlet-Integral

$$\int_{\Omega'} |\nabla_{\mathbb{S}^n} u|^2 dV = \int_{\Omega} g^{ij} u_{x^i} u_{x^j} \rho^n dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \rho^{n-2} dx.$$

Der Laplace-Beltrami-Operator $\Delta_{\mathbb{S}^n}$ ist gegeben durch

$$\Delta_{\mathbb{S}^n} u := \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right) = \frac{1}{\rho^n} \operatorname{div}(\rho^{n-2} \nabla u),$$

wobei $g = \det g_{ij}$ und g^{ij} die Komponenten der zum metrischen Tensor g_{ij} inversen Matrix bezeichnet. Für den p -Laplace-Beltrami-Operator auf \mathbb{S}^n erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta_{p, \mathbb{S}^n} u &:= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} (g^{\mu\nu} u_{x^\mu} u_{x^\nu})^{\frac{p-2}{2}} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right) \\ &= \frac{1}{\rho^n} \operatorname{div}(\rho^{n-p} |\nabla u|^{p-2} \nabla u). \end{aligned}$$

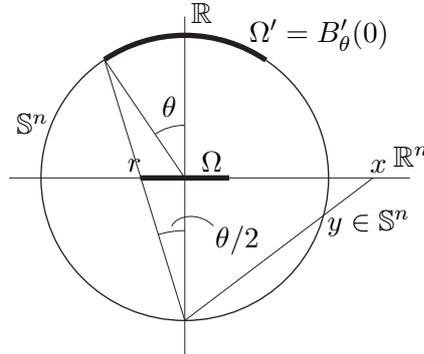


Abbildung 2.1: Stereographische Projektion des \mathbb{S}^n in den \mathbb{R}^n .

Das Dirichlet-Integral ist in dem Fall gegeben durch

$$\int_{\Omega'} |\nabla_{\mathbb{S}^n} u|^p dV = \int_{\Omega} (g^{ij} u_{x^i} u_{x^j})^{p/2} \rho^n dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^p \rho^{n-p} dx.$$

Definition 2.1 Die Bogenlänge $\theta = |y - X|_{\mathbb{S}^n}$ nennen wir geodätische Koordinate, wobei X den Nordpol bezeichnet. Analog zum euklidischen Raum sei $B'_{\Theta}(0) \subset \mathbb{S}^n$ eine geodätische Kugel, gegeben durch die Menge

$$B'_{\Theta}(0) := \{y \in \mathbb{S}^n : |y - X|_{\mathbb{S}^n} < \Theta\}.$$

Bemerkung 2.2 Im (\mathbb{R}^n, g) ist die geodätische Koordinate gegeben durch

$$r = |x| = \tan(\theta/2)$$

und

$$\Phi(B'_{\Theta}(0)) = B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_{\mathbb{R}^n} < R\},$$

wobei R durch $R = \tan(\Theta/2)$ gegeben ist (siehe Abbildung 2.1). └

2.2 Das Brezis-Nirenberg-Problem

Wir wenden uns nun dem Brezis-Nirenberg-Problem auf der Sphäre zu:

$$\begin{aligned} -\Delta_{p, \mathbb{S}^n} u - \lambda u^{q-1} &= u^{p^*-1} \quad \text{in } \Omega' \subset \mathbb{S}^n \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega' \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega'. \end{aligned} \tag{2.1}$$

An das Gebiet Ω' setzen wir voraus, dass $\overline{\Omega'} \neq \mathbb{S}^n$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $Y \notin \Omega'$ gilt. Durch stereographische Projektion von

$\Omega' \subset \mathbb{S}^n$ in den euklidischen Raum \mathbb{R}^n erhalten wir das folgende zu (2.1) äquivalente Problem:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\rho^{n-p}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \lambda\rho^n u^{q-1} &= \rho^n u^{p^*-1} \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\rho(x) = \frac{2}{1+|x|^2},$$

wobei wir mit Ω die stereographische Projektion von Ω' bezeichnen. Unter der Voraussetzung, dass der Rand genügend regulär ist, sind schwache Lösungen der Gleichung (2.2) auch starke Lösungen, daher $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. Aus der Theorie für lineare elliptische Operatoren erhalten wir für den Fall $p = 2$ klassische Lösungen. Die Details dazu können aus den folgenden Referenzen entnommen werden: Guedda und Véron [29], de Thélin [18], Struwe [41], Diaz [20], Gilbarg und Trudinger [28]. Für den Fall $p \neq 2$ sei im Speziellen auf die Arbeit von Guedda und Véron [29] verwiesen.

2.3 Allgemeines Existenzresultat

In der Arbeit von Bandle, Fleckinger und de Thélin [6] wird die Existenz und Nichtexistenz von Minimierern des Sobolev-Einbettungs-Problems diskutiert. Die variationelle Formulierung des Problems ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} S_{p,s}(\Omega) &= \inf_{u \in K} \int_{\Omega} |\nabla u|^p \rho^{n-p} dx \\ \text{mit } K &= \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega), \int_{\Omega} u^s \rho^n dx = 1 \right\}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

wobei das Gebiet Ω die stereographische Projektion von $\Omega' \subset \mathbb{S}^n$ ist. Falls ein Minimierer $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ für das Problem (2.3) existiert, erfüllt dieser unter geeigneter Skalierung die Euler-Gleichung

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\rho^{n-p}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= \rho^n u^{p^*-1} \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Diese Gleichung entspricht dem Problem (2.1) mit $\lambda = 0$, falls $s = p^*$. In der Arbeit [6] wird das folgende Resultat bewiesen:

1. Für alle $s > 0$, $1 < p < n$ und $s \neq p$ existiert ein $R_0 \geq 0$ so, dass das Problem (2.4) für alle $R \geq R_0$ in geodätischen Kugeln $B_R(0)$ eine Lösung hat.
2. Für $s > p^*$ existieren keine rotationssymmetrischen Lösungen in kleinen Kugeln.

3. Im kritischen Fall $s = p^*$ hat das Problem (2.4) für $p < (n+2)/3$ in jeder Kugel eine Lösung. Wegen der Monotonie $S_{p,p^*}(\Omega) \leq S_{p,p^*}(B_R(0))$ mit $B_R(0) \subset \Omega$, existiert daher in einem beliebigen Gebiet Ω eine Lösung. Für $p \geq (n+1)/2$ existieren in Kugeln mit $R < 1$ keine rotationssymmetrischen Lösungen.

Der folgende Satz ist eine Erweiterung des obigen Ergebnisses für den Fall $\lambda \neq 0$ und $s = p^*$.

Satz 2.3 *Unter der Voraussetzung $p < \frac{n+2}{3}$ und $p \leq q < p^*$ existiert für das Problem (2.1) mit $0 \leq \lambda < \lambda_0(q)$ eine Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, wobei*

$$\lambda_0(q) = \begin{cases} \lambda_1 & \text{für } p = q \\ +\infty & \text{für } p < q < p^*, \end{cases} \quad (2.5)$$

und λ_1 den kleinsten Eigenwert des p -Laplace-Beltrami-Operators mit Dirichlet-Randwert bezeichnet.

Beweis: Bandle, Fleckinger und de Thélin haben in [6] die Existenz einer Lösung $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ für $\lambda = 0$ mit

$$Q_0(w) = \frac{\int_{\Omega} \rho^{n-p} |\nabla w|^p dx}{\left(\int_{\Omega} \rho^n |w|^{p^*} dx\right)^{p/p^*}} < S_p$$

bewiesen. Für die Existenz einer Lösung mit Hilfe des freien Funktionals I_{λ} , folgt aus der lokalen Palais-Smale-Bedingung (P.-S.) $_{\beta}$ für I_{λ} mit $q \geq p$, dass die Bedingung $\sup_{t \geq 0} I_0(tw) < 1/nS_p^{n/p}$ erfüllt sein muss. Ferner nimmt das Funktional $I_0(tw)$ das Maximum für

$$t_0 = \left(\frac{\int_{\Omega} \rho^{n-p} |\nabla w|^p dx}{\int_{\Omega} \rho^n |w|^{p^*} dx} \right)^{\frac{1}{p^*-p}}$$

an. Wir erhalten somit

$$\sup_{t \geq 0} I_0(tw) \leq I_0(t_0 w) = \frac{1}{n} \left(\frac{\int_{\Omega} \rho^{n-p} |\nabla w|^p dx}{\left(\int_{\Omega} \rho^n |w|^{p^*} dx\right)^{p/p^*}} \right)^{n/p} < \frac{1}{n} S_p^{n/p}.$$

Für den Fall $q > p$ folgt aus dem Satz 1.7 die Existenz von λ^* so, dass für alle $\lambda > \lambda^*$ eine Lösung existiert. Da $I_{\lambda}(u)$ in λ für ein festes u monoton fallend ist, folgt $\lambda^* \leq 0$ aus der Existenz einer Lösung für $\lambda = 0$ und somit die Behauptung.

Für den Fall $q = p$ verwenden wir das Lemma 1.15. Wir suchen daher einen Minimierer $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ des Funktionals

$$Q_{\mu}(v) = \frac{\int_{\Omega} \rho^{n-p} |\nabla v|^p dx - \mu \int_{\Omega} \rho^n |v|^p dx}{\left(\int_{\Omega} \rho^n |v|^{p^*} dx\right)^{p/p^*}}.$$

Die Existenz eines positiven Minimierers v folgt, falls ein $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ existiert so, dass $Q_\mu(v_0) < S_p$ gilt. Die gesuchte Lösung u für das Problem (2.1) ist dann gegeben durch

$$u = K^{\frac{1}{p^*-p}} v \quad \text{und} \quad \lambda = \mu$$

wobei

$$K = \frac{\int_\Omega \rho^{n-p} |\nabla v|^p dx - \mu \int_\Omega \rho^n |v|^p dx}{\int_\Omega \rho^n |v|^{p^*} dx} > 0$$

erfüllt sein muss. Aus der Voraussetzung $0 \leq \lambda < \lambda_1$ folgt $K > 0$ mit $\mu = \lambda$ für alle $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Da $Q_\mu(v)$ in μ für ein festes v monoton fallend ist, folgt die Behauptung mit $v_0 = w$. \square

Bemerkung 2.4 Um aus der Verallgemeinerten Ambrosetti-Brezis-Cerami Bedingung (1.28) eine Lösungen für $q < p$ und $0 < \lambda < \lambda_0$ zu erhalten, muss die Bedingung

$$\sup_{t>0} I_\lambda^+(u_0 + t v) < C_0 + \frac{1}{n} S_p^{n/p}$$

verifiziert werden. Für $p \geq 2$ folgt aus dem Lemma 4.1 in Diaz [20]

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} I_\lambda^+(u_0 + t v) - C_0 &= \sup_{t > 0} I_\lambda^+(u_0 + t v) - I_\lambda^+(u_0) \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \int_\Omega \left(\frac{\rho^{n-p}}{p} (|\nabla u_0 + t \nabla v|^p - |\nabla u_0|^p) - \lambda \frac{t^q}{q} \rho^n (v^+)^q - \frac{t^{p^*}}{p^*} \rho^n (v^+)^{p^*} \right) dx \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \int_\Omega \left(\frac{\rho^{n-p}}{p} (|\nabla u_0 + t \nabla v|^p - |\nabla u_0|^p) - \lambda \frac{t^q}{q} \rho^n (v^+)^q - \frac{t^{p^*}}{p^*} \rho^n (v^+)^{p^*} \right) dx \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \int_\Omega \left(\frac{\rho^{n-p}}{p} (t^p |\nabla v|^p + (t |\nabla u_0|^{p-2} + t^{p-1} |\nabla v|^{p-2}) |\nabla u_0 \cdot \nabla v|) \right. \\ &\quad \left. - \lambda \frac{t^q}{q} \rho^n (v^+)^q - \frac{t^{p^*}}{p^*} \rho^n (v^+)^{p^*} \right) dx \end{aligned}$$

Die von Bandle, Fleckinger und de Thélin in [6] verwendete Funktion ψ_ε hat für $p < \frac{n+2}{3}$ die Eigenschaft:

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \left[\underbrace{\int_\Omega \left(\frac{\rho^{n-p}}{p} t^p |\nabla \psi_\varepsilon|^p - \frac{t^{p^*}}{p^*} \rho^n (\psi_\varepsilon^+)^{p^*} \right) dx}_{1/n S_p^{n/p} - O(\varepsilon^\alpha) < 1/n S_p^{n/p}} \right. \\ \left. + \underbrace{\int_\Omega \left(\frac{\rho^{n-p}}{p} ((t |\nabla u_0|^{p-2} + t^{p-1} |\nabla \psi_\varepsilon|^{p-2}) |\nabla u_0 \cdot \nabla \psi_\varepsilon|) - \lambda \frac{t^q}{q} \rho^n (\psi_\varepsilon^+)^q \right) dx}_{=O(\varepsilon^\beta)} \right]. \end{aligned}$$

Falls gezeigt werden kann, dass $\alpha < \beta$ gilt, würde die Existenz einer zweiten Lösung für ein genügend kleines $\varepsilon > 0$ folgen. Dies ist jedoch offen. \square

2.4 Allgemeines Nichtexistenzresultat

2.4.1 Sternförmige Gebiete

Wir betrachten das Problem (2.2) und schreiben anstelle der kritischen Potenz $p^* - 1$ eine allgemeine Potenz $s - 1$

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\rho^{n-p}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \lambda\rho^n u^{q-1} &= \rho^n u^{s-1} \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Definition 2.5 Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heisst sternförmig (bezüglich 0), wenn mit jedem Punkt $x \in \Omega$ die ganze Strecke $[0, x]$ in Ω liegt.

Satz 2.6 Sei Ω sternförmig, $\lambda < 0$, $q < s$ und $s > p^* = \frac{np}{n-p}$. Dann existiert für (2.6) in kleinen Gebieten mit

$$R^2 < \min \left\{ \frac{s-q}{s+q}, \frac{s-p^*}{s+p^*} \right\}, \quad R = \max\{|x| : x \in \Omega\} \quad (2.7)$$

keine Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $|u|_{L^s} < \infty$.

Beweis: Sei $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ eine schwache Lösung von (2.6) mit $|u|_{L^s} < \infty$. Dann erhalten wir aus dem Korollar B.2 die Pohozaev-Identität

$$\begin{aligned} \frac{p-1}{p} \int_{\partial\Omega} \rho^{n-p} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^p (x \cdot \nu) \, d\sigma &= \\ \int_{\Omega} \left[-\frac{n-p}{p} \left(\frac{1-|x|^2}{1+|x|^2} \right) + \frac{n}{s} \right] \rho^{n-p} |\nabla u|^p \, dx &+ \\ + \int_{\Omega} \left(\lambda \left[\frac{n}{q} \left(\frac{1-|x|^2}{1+|x|^2} \right) - \frac{n}{s} \right] \rho^n u^q - \frac{n}{s} \rho^{n+1} |x|^2 u^s \right) \, dx. \end{aligned}$$

Aus der Voraussetzung (2.7) folgt

$$-\frac{n-p}{p} \left(\frac{1-|x|^2}{1+|x|^2} \right) + \frac{n}{s} < 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (2.8)$$

und

$$\frac{n}{q} \left(\frac{1-|x|^2}{1+|x|^2} \right) - \frac{n}{s} > 0 \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.9)$$

Für Ω sternförmig folgt $x \cdot \nu \geq 0$ auf $\partial\Omega$. Somit folgt aus der Pohozaev-Identität die Behauptung. \square

2.4.2 Geodätische Kugeln

Aus dem Satz 2.6 erhalten wir für $s = p^*$ und Ω sternförmig keine Aussage. Ferner sind Lösungen von (2.2) für $p = 2$ in rotationssymmetrischen Gebieten rotationssymmetrisch (siehe Brock und Prajapat [15], Gidas, Ni und Nirenberg [27], Padilla [37], Kumaresan und Prajapat [33]). Wir beschränken uns daher im Folgenden auf rotationssymmetrische Lösungen in geodätischen Kugeln. Sei $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ und u eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -(\rho^{n-p}r^{n-1}|u'|^{p-2}u')' - \lambda\rho^n r^{n-1}u^{q-1} &= \rho^n r^{n-1}u^{p^*-1} \quad \text{in } (0, R) \\ u &> 0 \quad \text{in } (0, R) \\ u'(0) &= u(R) = 0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

mit $1 < p < n$, $n \geq 3$ und $1 < q < p^*$. Durch Testen der Gleichung (2.10) mit $a(r)u(r) + b(r)u'(r)$ erhalten wir die folgenden Ausdrücke:

1.

$$\begin{aligned} - \int_0^R \underbrace{(\rho^{n-p}r^{n-1}|u'|^{p-2}u')}'_{=: \sigma} (au + bu') dr &= \\ - \frac{p-1}{p} C_1 + \int_0^R \sigma |u'|^{p-2} u' u a' dr + \int_0^R \sigma |u'|^p \left(a + \frac{p-1}{p} b'\right) dr & \\ - \frac{1}{p} \int_0^R \sigma' |u'|^p b dr, & \end{aligned} \tag{2.11}$$

wobei die Konstante C_1 durch $C_1 = R^{n-1} \rho(R)^{n-p} |u'(R)|^p b(R)$ gegeben ist.

2.

$$\begin{aligned} \int_0^R \underbrace{\rho^n r^{n-1}}_{=: \tau} (\lambda u^{q-1} + u^{p^*-1}) (au + bu') dr &= \\ \int_0^R \tau (\lambda u^q + u^{p^*}) a dr - \int_0^R (\tau' b + \tau b') \left(\frac{\lambda}{q} u^q + \frac{1}{p^*} u^{p^*}\right) dr. & \end{aligned} \tag{2.12}$$

Wir betrachten nun die Koeffizienten der beiden Gleichungen (2.11) und (2.12):

$$\begin{aligned} |u'|^p &: -\sigma \left(a + \frac{p-1}{p} b'\right) + \frac{1}{p} \sigma' b =: A \\ |u'|^{p-2} u' u &: -\sigma a' =: B \\ |u|^q &: \lambda \tau a - (\tau' b + \tau b') \frac{\lambda}{q} =: C \\ |u|^{p^*} &: \tau a - (\tau' b + \tau b') \frac{1}{p^*} =: D \end{aligned}$$

Mit $a = 1$ folgt $B \equiv 0$. Wir erhalten somit die Identität

$$-\frac{p-1}{p}C_1 - \int_0^R A |u'|^p dr = \int_0^R C |u|^q + D |u|^{p^*} dr. \quad (2.13)$$

Wir lösen die Differenzialgleichung $A = 0$:

$$(1 - n + (1 + n - 2p) r^2) b(r) + (r + r^3) (p + (p - 1) b'(r)) = 0$$

mit der Anfangsbedingung $b(0) = 0$ und erhalten für $b(r)$ den Ausdruck

$$b(r) = \frac{p}{n-p} \frac{r}{(1+r^2)^{\frac{n-p}{p-1}}} {}_2F_1 \left(\frac{n-p}{2(1-p)}, -\frac{n-p}{p-1}, \frac{3p-n-2}{2(p-1)}, -r^2 \right).$$

Die hypergeometrische Funktion ${}_2F_1$ lässt sich als Reihe darstellen:

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} z^k / k!,$$

wobei $(\cdot)_k$ für das Pochhammersymbol steht. Es gilt

$$(a)_k = a(a+1) \dots (a+k-1) = \Gamma(a+k)/\Gamma(a).$$

Für C und D erhalten wir

$$\begin{aligned} C &= \lambda \frac{\rho^n r^{n-1}}{(n-p)(p-1)q} \left[(n-p)(p(q+1)-q) \right. \\ &\quad \left. - \frac{p^2(n-1)(1-r^2)}{(1+r^2)^{\frac{n-1}{p-1}}} {}_2F_1 \left(\frac{n-p}{2(1-p)}, -\frac{n-p}{p-1}, \frac{3p-n-2}{2(p-1)}, -r^2 \right) \right] \\ D &= \frac{\rho^n r^{n-1} (n-1)p}{n(p-1)} \left[1 - \frac{(1-r^2)}{(1+r^2)^{\frac{n-1}{p-1}}} \right. \\ &\quad \left. \cdot {}_2F_1 \left(\frac{n-p}{2(1-p)}, -\frac{n-p}{p-1}, \frac{3p-n-2}{2(p-1)}, -r^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Es folgt für die Identität (2.13)

$$-\frac{p-1}{p}R^{n-1}\rho(R)^{n-p}|u'(R)|^p b(R) = \int_0^R C |u|^q + D |u|^{p^*} dr. \quad (2.14)$$

Für r klein ist die hypergeometrische Funktion ${}_2F_1$ gegeben durch

$$\begin{aligned} {}_2F_1 \left(\frac{n-p}{2(1-p)}, -\frac{n-p}{p-1}, \frac{3p-n-2}{2(p-1)}, -r^2 \right) &= \\ &= 1 + \frac{(n-p)^2 r^2}{(2+n-3p)(p-1)} + \frac{(1+n-2p)(n-p)^2 r^4}{2(4+n-5p)(p-1)^2} \\ &\quad + \frac{(2+n-3p)(1+n-2p)(n-p)^2 r^6}{6(6+n-7p)(p-1)^3} + O(r^8). \end{aligned}$$

Diese Reihenentwicklung von ${}_2F_1$ setzen wir in C und D ein:

$$C = \lambda \frac{\rho^n r^{n-1}}{(n-p)(p-1)q} \left(-((p-1)(n(p-q) + pq)) \right. \\ \left. - \frac{4(n-1)(p-1)p^2 r^2}{2+n-3p} - \frac{8(n-1)(p-1)p^2(-2+n+p)r^4}{(4+n-5p)(2+n-3p)} \right. \\ \left. - \frac{12(n-1)(p-1)p^2(8+n^2-10p+3p^2+n(4p-6))r^6}{(6+n-7p)(4+n-5p)(2+n-3p)} + O(r^8) \right) \\ D = \frac{\rho^n r^{n-1}(n-1)p}{n(p-1)} \left(-\frac{4(p-1)r^2}{2+n-3p} - \frac{8(p-1)(-2+n+p)r^4}{(4+n-5p)(2+n-3p)} \right. \\ \left. - \frac{12(p-1)(-2+n+p)(-4+n+3p)r^6}{(6+n-7p)(4+n-5p)(2+n-3p)} + O(r^8) \right).$$

Für r klein folgt nun

$$C \geq 0 \quad \text{falls} \quad \begin{cases} q \geq \frac{np}{n-p}, \lambda > 0 \\ q < \frac{np}{n-p}, \lambda \leq 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

$$D > 0 \quad \text{falls} \quad p > \frac{n+2}{3}. \quad (2.16)$$

Der Fall $\lambda > 0$ ist insofern uninteressant, als dass u^q eine subkritische Störung sein soll. Wir können das Resultat im folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 2.7 Sei $1 < q < p^*$, $\lambda \leq 0$ und $p > \frac{n+2}{3}$, dann existiert ein $R_0(n, p, q) > 0$ so, dass für $R < R_0$ das Randwertproblem (2.10) keine Lösung hat. Insbesondere hat das Problem (2.1) in $\Omega = B_R(0)$ keine rotationssymmetrische Lösung.

Bemerkung 2.8 Im Fall $p = 2$ sind Lösungen von (2.1) in $\Omega = B_R(0)$ rotationssymmetrisch (siehe Gidas, Ni und Nirenberg [27]). Wir erhalten daher für $n = 3$ die Nichtexistenz von Lösungen für das Problem (2.1) in $\Omega = B_R(0)$. —

Korollar 2.9 Sei $p > \frac{n+2}{3}$. Unter der Voraussetzung $q = p$ oder $\lambda = 0$ ist der kritische Radius $R_0(n, p, q)$ gegeben durch eine Funktion einer Veränderlichen $R_0(t)$ mit

$$t(n, p) = \frac{3p - n - 2}{2(n-1)} \in (0, 1).$$

Beweis: Setze $p(t) = (1-t)\frac{n+2}{3} + tn$, dann folgt mit der Bezeichnung

$${}_2F_1 = {}_2F_1 \left(-\frac{1-t}{1+2t}, -\frac{2(1-t)}{1+2t}, \frac{3t}{1+2t}, -r^2 \right):$$

$$\begin{aligned}
 b(r) &= \left(\frac{3n}{2(n-1)(1-t)} - 1 \right) \frac{r}{(1+r^2)^{\frac{2(1-t)}{1+2t}}} {}_2F_1, \\
 C &= \lambda \rho^n r^{n-1} \frac{n+2+2t(n-1)}{2(n-1)(1-t)(1+2t)} \left[2(1-t) - 3(1-r^2) {}_2F_1 \right] \\
 D &= \rho^n r^{n-1} \frac{2+n+2(n-1)t}{n(1+2t)} \left[1 - \frac{(1-r^2)}{(1+r^2)^{\frac{3}{1+2t}}} {}_2F_1 \right].
 \end{aligned}$$

Da der Vorzeichenwechsel dieser Ausdrücke nur von t abhängt, folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 2.10 Der Satz 2.7 gibt eine Antwort auf eine offene Frage in Bandle et al. [6]: Für $p \in (\frac{n+2}{3}, \frac{n+1}{2})$ und $s = p^*$ folgt aus dem obigen Resultat für kleine Kugeln $B_R(0)$ mit $R < R_0$ die Nichtexistenz von rotationssymmetrischen Lösungen. \square

Bemerkung 2.11 Der kritische Radius R_0 kann numerisch berechnet werden (siehe Abbildung 2.2).

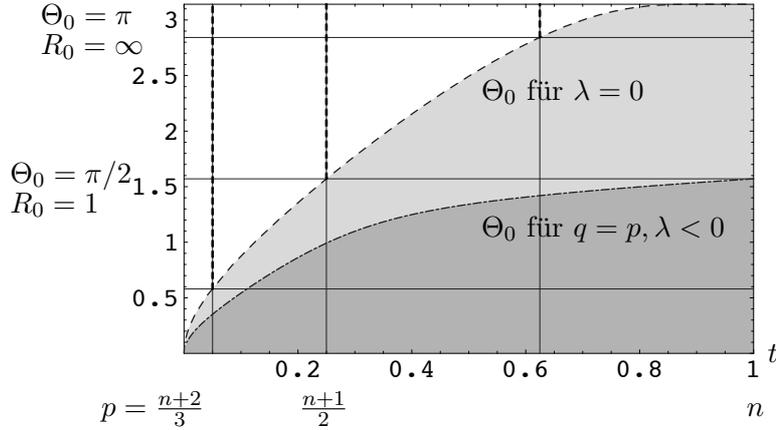


Abbildung 2.2: $R_0 = \tan \Theta_0/2$ in Abhängigkeit von t , für $\lambda = 0$ und $p = q$ mit $\lambda < 0$. Die dicken gestrichelten Linien stehen für die Beispiele aus der folgenden Bemerkung.

1. Sei $\lambda = 0$. Da D für $p > \frac{n+2}{3}$ für alle $r > 0$ positiv ist, ist R_0 durch die erste Nullstelle von $b(r)$ bestimmt. Die Nullstelle von $b(r)$ ist gegeben durch die Gleichung

$${}_2F_1 \left(-\frac{1-t}{1+2t}, -\frac{2(1-t)}{1+2t}, \frac{3t}{1+2t}, -r^2 \right) = 0.$$

Für $p = \frac{n+1}{2}$ folgt $t = 1/4$ und ${}_2F_1(-1/2, -1, 1/2, -r^2) = 1 - r^2$. Somit erhalten wir $R_0 = 1$, bzw. $\Theta_0 = \pi/2$.

2. Sei $q = p$, dann ist R_0 gegeben durch das Minimum der Nullstellen von b und C . Aus den numerischen Berechnungen folgt, dass R_0 durch die Nullstelle von C bestimmt wird. Daher durch die Gleichung

$$\left[2(1-t) - 3(1-r^2) {}_2F_1\left(-\frac{1-t}{1+2t}, -\frac{2(1-t)}{1+2t}, \frac{3t}{1+2t}, -r^2\right) \right] = 0.$$

3. Für $q \neq p$ muss für jede Dimension n die Schranke $R_0(n, p, q, \lambda)$ separat berechnet werden.

—|

Bemerkung 2.12 Eine interessante Frage, die in der Arbeit Bandle, Peletier und Stingelin[8] diskutiert werden soll, ist ob die Schranke R_0 aus dem Nichtexistenzresultat scharf ist oder nicht. Numerisch kann die Existenz von Lösungen für $\lambda = 0$ in Kugeln $B_R(0)$ mit Radius $R > R_0$ beobachtet werden. In der Abbildung 2.3 sind die folgenden Beispiele berechnet:

	$t = 0.05$	$t = 0.25$	$t = 0.625$
	$\Theta_0 \approx 0.59$	$\Theta_0 = \pi/2$	$\Theta_0 \approx 2.85$
$n = 3$	$p = 1.7\bar{3}$	$p = 2$	$p = 2.5$
$n = 4$	$p = 2.1$	$p = 2.5$	$p = 3.25$
$n = 5$	$p = 2.4\bar{6}$	$p = 3$	$p = 4$

Die Beispiele sind als dicke gestrichelte Linien auch in der Abbildung 2.2 gekennzeichnet.

—|

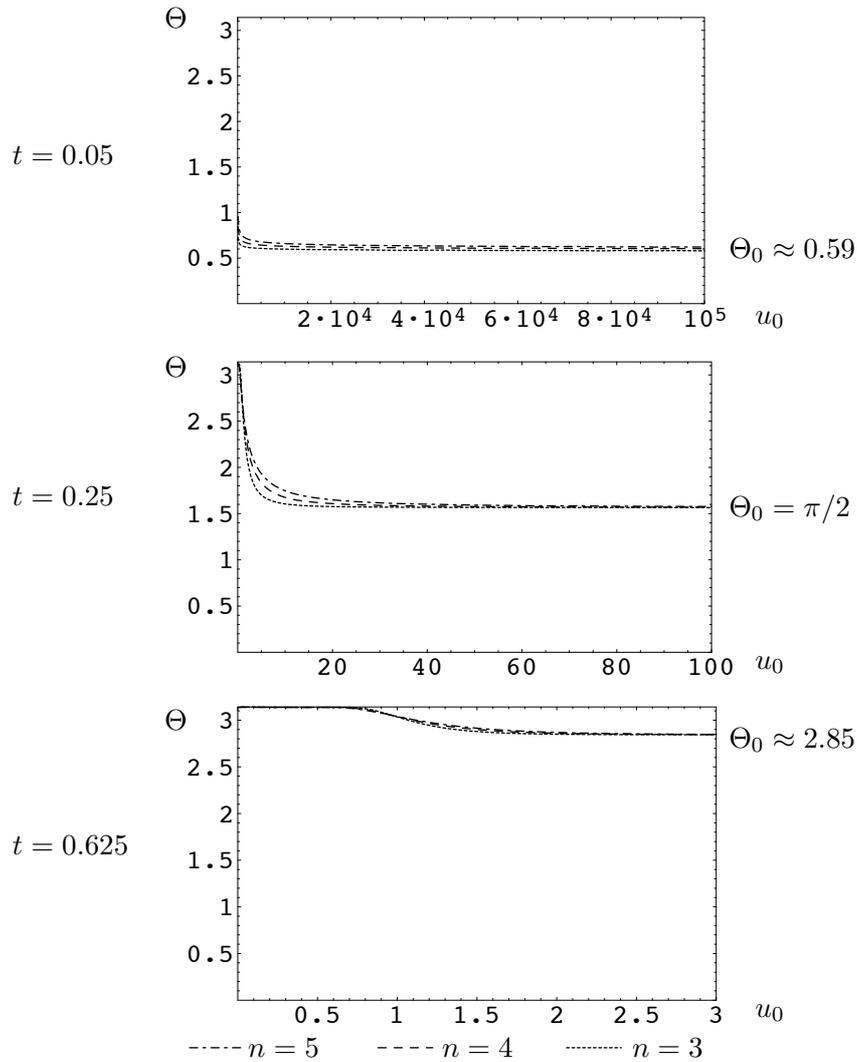


Abbildung 2.3: $\Theta(u_0) = 2 \arctan R(u_0)$, wobei $R(u_0) = \min\{r > 0 : u(r; u_0) = 0\}$, mit $u(r; u_0)$ ist die Lösung des zum Randwertproblem (2.10) analogen Anfangswertproblem (3.1) (siehe Kapitel 3.2).

2.5 Der lineare Fall

2.5.1 $p = 2$

Wir konzentrieren uns nun auf den linearen Fall des Brezis-Nirenberg-Problems. Für $p = q = 2$ erhalten wir das Problem:

$$\begin{aligned} -\Delta_{\mathbb{S}^n} u - \lambda u &= u^{\frac{n+2}{n-2}} \quad \text{in } \Omega' \subset \mathbb{S}^n \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega' \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega'. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Das äquivalente Problem in \mathbb{R}^n ist gegeben durch

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\rho^{n-2} \nabla u) - \lambda \rho^n u &= \rho^n u^{\frac{n+2}{n-2}} \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Es wird sich zeigen, dass in diesem Fall das mit dem Lemma A.1 transformierte Problem am einfachsten zu handhaben ist. Mit der Transformation $u = \rho^{-\frac{n-2}{2}} v$ erhalten wir für das Problem (2.18)

$$\begin{aligned} -\Delta v - \frac{n(n-2)}{4} \rho^2 v - \lambda \rho^2 v &= v^{\frac{n+2}{n-2}} \quad \text{in } \Omega \\ v &> 0 \quad \text{in } \Omega \\ v &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Die Abbildung 2.4 gibt eine Übersicht der Existenz- und Nichtexistenzresultate in diesem Fall. Die mit einem Fragezeichen bezeichneten Gebiete werden im Kapitel 2.9 separat diskutiert.

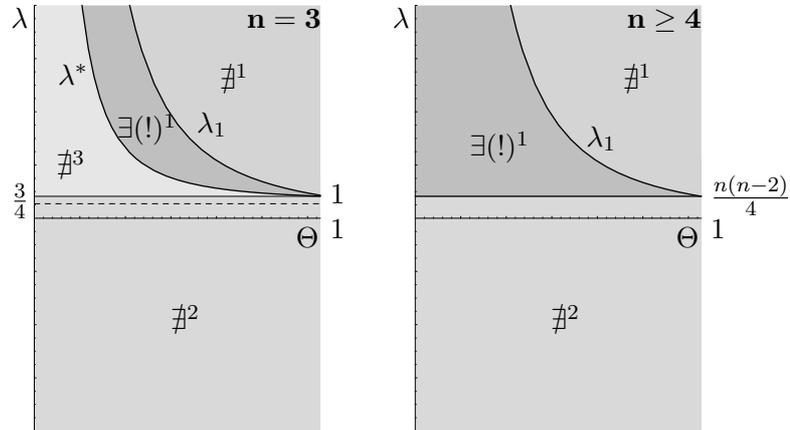
In [4] haben Bandle und Benguria den Fall $n = 3$ betrachtet. Der Vollständigkeit halber sei hier das Resultat erwähnt:

Satz 2.13 (Bandle, Benguria) *Das Problem (2.17) hat für $\Omega = B_R(0)$, $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_1)$ und $n = 3$ eine rotationssymmetrische Lösung $u \in W_0^{1,2}(B_R(0))$, wobei λ_1 der kleinste Eigenwert des Laplace-Beltrami-Operators $-\Delta_{\mathbb{S}^3}$ mit Dirichlet-Randwert bezeichnet.*

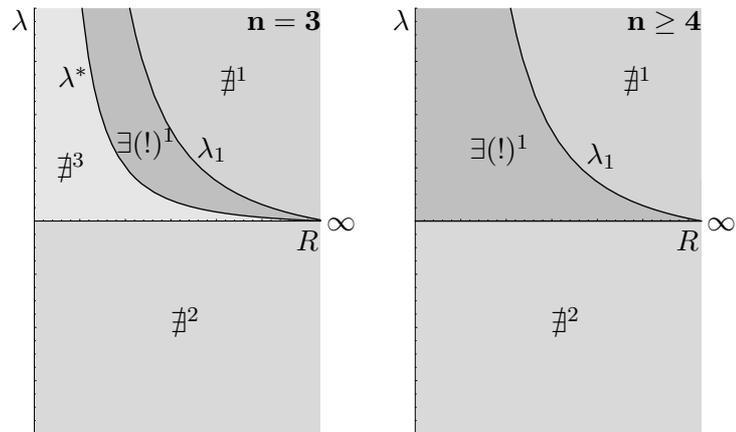
Sei $\Theta = \theta(R)$ der Radius der Kugel $B_R(0)$ in den θ -Koordinaten. Dann ist $\lambda^ = \frac{\pi^2 - 4\Theta^2}{4\Theta^2}$ und $\lambda_1 = \frac{\pi^2 - \Theta^2}{\Theta^2}$.*

Für $n \geq 4$ erhalten wir ein analoges Resultat, wobei das Gebiet Ω in dem Fall ein beliebiges Gebiet ist.

Satz 2.14 *Das Problem (2.18) hat für $\lambda \in \left(-\frac{n(n-2)}{4}, \lambda_1\right)$ und $n \geq 4$ eine Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, wobei λ_1 der kleinste Eigenwert des Laplace-Beltrami-Operators $-\Delta_{\mathbb{S}^n}$ mit Dirichlet-Randwert bezeichnet.*



(a) Situation im hyperbolischen Fall \mathbb{H}^n . Für $n = 3$ gilt $\lambda^* = 1 + \frac{\pi^2}{4\Theta^2}$ und $\lambda_1 = 1 + \frac{\pi^2}{\Theta^2}$ in Kugeln $\Omega = B_\Theta(0)$ mit $\Theta = 2 \operatorname{arctanh} R$. Siehe Stapelkamp [40].



(b) Situation im euklidischen Fall \mathbb{R}^n . Für $n = 3$ gilt $\lambda^* = \frac{1}{4}\lambda_1$ und $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{R^2}$ in Kugeln $\Omega = B_R(0)$. Siehe Brezis und Nirenberg [13].

Abbildung 2.5: Gegenüberstellung der Ergebnisse in \mathbb{H}^n und \mathbb{R}^n für den Fall $n = 3$ und $n \geq 4$. Für Ω haben wir die folgenden Voraussetzungen: $\cdot^1 = \Omega$ beliebig, $\cdot^2 = \Omega$ sternförmig, $\cdot^3 = \Omega$ geodätische Kugel. Die Eindeutigkeit $\exists(!)$ der Lösung gilt, falls $\Omega = B_R(0)$.

Es bleibt der letzte Term abzuschätzen. Sei $R > 0$ so, dass $B_R(0) \subset \Omega$ gilt, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho^2 \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{n-2}{2}}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{n-2}} dx &\geq \int_{B_R(0)} \rho^2 \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{n-2}{2}}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{n-2}} dx \\ &= |\mathbb{S}^n| \int_0^R \rho^2 \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{n-2}{2}}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{n-2}} r^{n-1} dr \geq |\mathbb{S}^n| \left[\int_0^\varepsilon \dots dr + \int_\varepsilon^R \dots dr \right]. \end{aligned}$$

Diese beiden Teilintegrale können folgendermassen abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon \rho^2 \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{n-2}{2}}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{n-2}} r^{n-1} dr &\geq \rho(\varepsilon)^2 \int_0^\varepsilon \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{n-2}{2}}}{(2\varepsilon^2)^{n-2}} r^{n-1} dr \\ &= C \varepsilon^{n-2-2n+4+n} = C \varepsilon^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^R \rho^2 \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{n-2}{2}}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{n-2}} r^{n-1} dr &\geq \rho(R)^2 \int_\varepsilon^R \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{n-2}{2}}}{(2r^2)^{n-2}} r^{n-1} dr \\ &= C \varepsilon^{n-2} \int_\varepsilon^R \frac{1}{r^{n-3}} dr = \begin{cases} C_1 \varepsilon^2 |\log(\varepsilon)| + C_2 \varepsilon^2 & \text{für } n = 4 \\ C_1 \varepsilon^2 + C_2 \varepsilon^{n-2} & \text{für } n \geq 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Aus den verschiedenen Termen erhalten wir die Behauptung. □

Mit diesem Lemma und dem Mountainpass-Lemma 1.5 folgt der Beweis des Satzes 2.14:

Beweis Satz 2.14: Wir betrachten das zu (2.18) äquivalente Problem (2.19) (vergleiche Lemma A.1). Das zugehörige Funktional ist gegeben durch

$$I_\mu(v) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - \frac{\mu}{2} \rho^2 |v|^2 - \frac{1}{2^*} |v|^{2^*} \right) dx,$$

mit $\mu = \frac{n(n-2)}{4} + \lambda$. Aus dem Lemma 1.4 folgt, dass das Funktional I_μ die lokale Palais-Smale-Bedingung (P.-S.) $_\beta$ mit $\beta = \frac{1}{n} S_2^{n/2}$ erfüllt. Für die Existenz einer Lösung mit Hilfe des Mountainpass-Lemmas 1.5 bleibt zu zeigen, dass für $\mu > 0$

$$c_0 = \inf_{P \in \mathcal{P}} \max_{w \in P} I_\mu(w) < \frac{1}{n} S_2^{n/2} \quad (2.23)$$

gilt, wobei \mathcal{P} die Klasse der stetigen Wege von 0 nach v_1 , für eine geeignete Funktion v_1 mit $I_\mu(v_1) \leq 0$, bezeichnet. Sei $v_1 = t_1 v_0$ mit $t_1 > 0$ genügend gross so, dass $I_\mu(t_1 v_0) \leq 0$. Die Bedingung (2.23) folgt, falls

$$\sup_{t \geq 0} I_\mu(t v_0) = \sup_{t \geq 0} \int_{\Omega} \left(\frac{t^2}{2} (|\nabla v_0|^2 - \mu \rho^2 |v_0|^2) - \frac{t^{2^*}}{2^*} |v_0|^{2^*} \right) dx < \frac{1}{n} S_2^{n/2}$$

erfüllt ist. Für ein festes v_0 wird das Supremum $\sup_{t \geq 0} I_\mu(t v_0)$ für

$$t_0^{2^*-2} = \frac{\int_{\Omega} (|\nabla v_0|^2 - \mu \rho^2 |v_0|^2) dx}{\int_{\Omega} |v_0|^{2^*} dx}$$

angenommen. Das t_0 in der Bedingung $I_\mu(t_0 v_0) < \frac{1}{n} S_2^{n/2}$ eingesetzt ergibt die zu (2.23) äquivalente Bedingung

$$\frac{\int_{\Omega} (|\nabla v_0|^2 - \mu \rho^2 |v_0|^2) dx}{\left(\int_{\Omega} |v_0|^{2^*} dx\right)^{2/2^*}} < S_2. \quad (2.24)$$

Sei $v_0 = \psi_\varepsilon$, dann erhalten wir mit dem Lemma 2.15 für $n = 4$

$$\frac{S_2^{n/2} - \mu C_1 \varepsilon^2 |\log(\varepsilon)| + O(\varepsilon^{n-2})}{S_2^{\frac{n-2}{2}} + O(\varepsilon^2)} = S_2 - \mu C \varepsilon^2 |\log(\varepsilon)| + O(\varepsilon^{n-2}) < S_2$$

und für $n > 4$

$$S_2 - \mu C \varepsilon^2 + O(\varepsilon^{n-2}) < S_2,$$

mit ε genügend klein. Mit $u = \rho^{-\frac{n-2}{2}} v$ folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 2.16 Für das Problem (2.18) kann die Existenz auch ohne Transformation gezeigt werden. Das zugehörige Funktional ist dann gegeben durch

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho^{n-2} |\nabla u|^2 - \lambda \rho^n |u|^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} \rho^n |u|^{2^*} dx.$$

Als geeignete Testfunktion verwendet man in dem Fall die Funktion $\tilde{u}_\varepsilon^* = \rho^{-\frac{n-2}{2}} u_\varepsilon \phi$ (siehe auch Lemma A.2). \square

Satz 2.17 Sei $\lambda_1 > 0$ der kleinste Eigenwert des Laplace-Beltrami-Operators $-\Delta_{\mathbb{S}^n}$ mit Dirichlet-Randwert, dann hat das Problem (2.17) für $\lambda \geq \lambda_1$ keine Lösung.

Beweis: Sei ϕ die zum kleinsten Eigenwert gehörige positive Eigenfunktion des Laplace-Beltrami-Operators $-\Delta_{\mathbb{S}^n}$ mit Dirichlet-Randwert. Die Funktion ϕ erfüllt daher die Gleichung

$$-\int_{\Omega'} \Delta_{\mathbb{S}^n} \phi \psi dV - \lambda_1 \int_{\Omega'} \phi \psi dV = 0 \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega'). \quad (2.25)$$

Wir testen die Gleichung (2.17) mit ϕ und erhalten

$$-\int_{\Omega'} \Delta_{\mathbb{S}^n} u \phi dV - \lambda \int_{\Omega'} u \phi dV = \int_{\Omega'} u^{\frac{n+2}{n-2}} \phi dV.$$

Nach zweifacher partieller Integration erhalten wir

$$-\int_{\Omega'} u \Delta_{\mathbb{S}^n} \phi \, dV - \lambda \int_{\Omega'} u \phi \, dV = \int_{\Omega'} u^{\frac{n+2}{n-2}} \phi \, dV.$$

Mit (2.25) erhalten wir

$$\int_{\Omega'} (\lambda_1 - \lambda) u \phi \, dV = \int_{\Omega'} u^{\frac{n+2}{n-2}} \phi \, dV$$

und für $\lambda \geq \lambda_1$ folgt die Behauptung. \square

Das Nichtexistenzresultat von Bandle und Benguria [4] kann auch für Dimensionen $n \geq 4$ bewiesen werden. Der folgende Satz beinhaltet zudem eine Verallgemeinerung des Resultates von Bandle und Benguria für $n = 3$ in sternförmigen Gebieten.

Satz 2.18 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ sternförmig und $\max\{|x| : x \in \Omega\} < 1$, dann hat das Problem (2.17) für $\lambda < -\frac{n(n-2)}{4}$ keine Lösung.*

Beweis: Wir verwenden die Darstellung (2.19). Sei $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ eine Lösung von (2.19). Aus dem Lemma B.1 mit $G(x, u) = \left(\frac{n(n-2)}{8} + \frac{\lambda}{2}\right) \rho^2 |v|^2 + \frac{1}{2^*} |v|^{2^*}$ erhalten wir die Pohozaev-Identität

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2 (x \cdot \nu) \, do &= \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} \left(-|\nabla v|^2 + v^{2^*} \right) \, dx \\ &+ \frac{n}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{n(n-2)}{4} + \lambda \right) \rho^2 v^2 \, dx - \int_{\Omega} \left(\frac{n(n-2)}{4} + \lambda \right) \rho^3 |x|^2 v^2 \, dx. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der schwachen Gleichung für v erhalten wir

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2 (x \cdot \nu) \, do = \int_{\Omega} \left(\frac{n(n-2)}{4} + \lambda \right) \rho^2 \frac{1-|x|^2}{1+|x|^2} v^2 \, dx.$$

Für $\lambda < -\frac{n(n-2)}{4}$ und $\max\{|x| : x \in \Omega\} < 1$ folgt die Behauptung. \square

Vermutung 2.19 *Sei $\Omega = B_R(0)$ und $R > 1$, dann existiert eine Funktion $\nu(R) < -\frac{n(n-2)}{4}$ so, dass für $\lambda \in \left(\nu(R), -\frac{n(n-2)}{4}\right)$ das Problem (2.18) keine rotationssymmetrische Lösung besitzt.*

Für $n = 3$ haben Bandle und Benguria in [4] einen Beweis gegeben. Numerische Berechnungen lassen vermuten, dass die Behauptung auch für $n \geq 4$ richtig ist (vergleiche Abbildung 2.4). Im Folgenden soll eine Beweis-idee gegeben werden.

Beweisidee: Rotationssymmetrische Lösungen des Problems (2.19) genügen der Gleichung

$$\begin{aligned} -v''(r) - \frac{n-1}{r}v' &= \mu \rho^2 v + v^{\frac{n+2}{n-2}} \\ v'(0) &= v(R) = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

mit $\mu = \frac{n(n-2)}{4} + \lambda$. Die Gleichung mit $a v + b v'$ getestet ergibt

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{2} a' v^2 - a v v' - \frac{1}{2} b v'^2 \right]_0^R + \int_0^R \left(a + \frac{b'}{2} - \frac{n-1}{r} b \right) v'^2 dr - \int_0^R \frac{a''}{2} v^2 dr \\ &\quad - \left[\frac{n-1}{2r} a v^2 \right]_0^R + \int_0^R \frac{n-1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} a + \frac{1}{r} a' \right) v^2 dr \\ &= \left[\frac{\mu}{2} \rho^2 b v^2 + \frac{1}{2^*} b v^{2^*} \right]_0^R + \int_0^R \mu (\rho^2 a - \rho \rho' b - \frac{1}{2} \rho^2 b') v^2 dr \\ &\quad + \int_0^R \left(a - \frac{1}{2^*} b' \right) v^{2^*} dr. \end{aligned}$$

Sei $b(0) = 0$ und $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{a}{r} \leq 0$, dann folgt

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} b(R) v'(R)^2 + \left[\left(\frac{n-1}{2} \frac{a}{r} - \frac{1}{2} a' \right) v^2 \right]_{r \rightarrow 0} + \int_0^R \left(a + \frac{b'}{2} - \frac{n-1}{r} b \right) v'^2 dr \\ &= \int_0^R \left(\frac{a''}{2} - \frac{n-1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} a + \frac{1}{r} a' \right) \right) v^2 dr \\ &\quad + \mu \int_0^R \left(\rho^2 a - \rho \rho' b - \frac{1}{2} \rho^2 b' \right) v^2 dr + \int_0^R \left(a - \frac{1}{2^*} b' \right) v^{2^*} dr. \end{aligned}$$

Mit der Notation

$$\begin{aligned} A &= a + \frac{b'}{2} - \frac{n-1}{r} b \\ B &= \frac{a''}{2} - \frac{n-1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} a + \frac{1}{r} a' \right) + \mu (\rho^2 a - \rho \rho' b - \frac{1}{2} \rho^2 b') \\ C &= a - \frac{1}{2^*} b' \end{aligned}$$

erhalten wir

$$-\frac{1}{2} b(R) v'(R)^2 + \frac{n-1}{2} \frac{a}{r} v^2 \Big|_{r \rightarrow 0} + \int_0^R A v'^2 dr = \int_0^R B v^2 dr + \int_0^R C v^{2^*} dr.$$

Aus der Gleichung $A = 0$ erhalten wir $a(r) = \frac{n-1}{r} b(r) - \frac{b'(r)}{2}$. Für $b(r)$ wählen wir $b(r) = r^{n-1} g(r)$ und erhalten somit

$$\begin{aligned} B &= \frac{r^{n-4}}{4} \left[-((n-3)(n-1) - 4\rho^3 r^4 \mu) g(r) \right. \\ &\quad \left. + (r(n-3)(n-1) - 4\rho^2 r^2 \mu) g'(r) - r^3 g^{(3)}(r) \right] \\ C &= \frac{n-1}{n} r^{n-2} (g(r) - r g'(r)). \end{aligned}$$

Für $n = 3$ kann die Differentialgleichung $B = 0$ gelöst werden. Wir erhalten

$$g(r) = C_1 \frac{1+r^2}{2} + C_2 \frac{ie^{2i\sqrt{1+4\mu} \arctan(r)}}{4\sqrt{1+4\mu}} + C_3 \frac{e^{-2i\sqrt{1+4\mu} \arctan(r)}}{16(1+4)\mu}.$$

Für $\mu < -\frac{1}{4}$ erhält man das Resultat von Bandle und Benguria in den r -Koordinaten. Um die Existenz einer positiven Lösung von (2.26) ausschliessen zu können, muss $B \geq 0$, $C > 0$, $\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{n-1}{2} \frac{a(r)}{r} - \frac{1}{2} a'(r) \right) \leq 0$, $b(0) = 0$, $\lim_{r \rightarrow 0} r^{n-1} g(r) = 0$ und $g(R) > 0$ sein. In einem ersten Schritt betrachten wir die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} B &= -\frac{r^{n-4}}{4} ((n-3)(n-1)(g(r) - rg'(r)) + r^3 g^{(3)}(r)) \\ &\quad + \mu r^{n-1} (r \rho^3 g - \rho^2 g') = 0 \end{aligned}$$

für $\mu \rightarrow 0$ bzw. $\mu \rightarrow -\infty$.

1. $\mu \rightarrow 0$. Wir betrachten daher die Differentialgleichung

$$(n-3)(n-1)(g(r) - rg'(r)) + r^3 g^{(3)}(r) = 0.$$

Die Funktion $g(r) = c_1 r^{3-n} + c_2 r + c_3 r^{n-1}$ ist eine Lösung. Diese Lösung in a , b und C eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} a &= (n-2)c_1 r + \frac{n-2}{2} c_2 r^{n-1} \\ b &= c_1 r^2 + c_2 r^n + c_3 r^{2(n-1)} \\ C &= \frac{(n-2)(n-1)}{n} (c_1 r - r^{2n} c_3). \end{aligned}$$

$c_1 \leq 0$ genügt der Bedingung $\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{n-1}{2} \frac{a(r)}{r} - \frac{1}{2} a'(r) \right) \leq 0$. Aus $C > 0$ folgt $c_1 = 0$ und $c_3 < 0$. Somit haben wir

$$\begin{aligned} a &= \frac{n-2}{2} c_2 r^{n-1} \\ b &= c_2 r^n - |c_3| r^{2(n-1)} \\ C &= |c_3| \frac{(n-2)(n-1)}{n} r^{2n}. \end{aligned}$$

Für c_2 erhalten wir $c_2 \geq -c_3 R^{n-2} > 0$. Die Konstanten c_2 und c_3 können daher zu jedem $R > 0$ passend gewählt werden. Es folgt $\nu(R \rightarrow \infty) = 0$.

2. $\mu \rightarrow -\infty$. In dem Fall betrachten wir die Differentialgleichung

$$r \rho g - g' = 0.$$

Als Lösung erhalten wir die Funktion $g(r) = c(1 + r^2)$. Diese Lösung in a , b und C eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} a &= c \frac{1}{2} r^{n-2} (n-1 + (n-3)r^2) \\ b &= c r^{n-1} (1 + r^2) \\ C &= c \frac{n-1}{n} r^{n-2} (1 - r^2). \end{aligned}$$

Wir erhalten daher in Kugeln mit $R < 1$ einen Widerspruch zur Annahme, dass eine Lösung für $\mu \rightarrow -\infty$ existiert. Es folgt in dem Fall $\nu(R \rightarrow 1) = -\infty$.

Offen bleibt die Verbindung dieser zwei Punkte. □

Ein alternativer Ansatz für einen Beweis der Vermutung kann auch in den geodätischen Koordinaten geführt werden:

Beweisidee: In geodätischen Koordinaten genügen rotationssymmetrische Lösungen des Problems (2.17) dem Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u'' - (n-1) \cot \theta u' &= \lambda u + u^{\frac{n+2}{n-2}} \quad \theta \in (0, \Theta) \\ u'(0) &= u(\Theta) = 0. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Die obige Gleichung getestet mit $\sin^2 \theta g u'$ ergibt

$$\begin{aligned} - \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta g u'^2 \right]_0^\Theta + \int_0^\Theta (2 \sin \theta \cos \theta g + \sin^2 \theta g') \frac{u'^2}{2} d\theta \\ - (n-1) \int_0^\Theta \cos \theta \sin \theta g u'^2 d\theta = \left[(\sin^2 \theta g) \left(\frac{\lambda}{2} u^2 + \frac{1}{2^*} u^{2^*} \right) \right]_0^\Theta \\ - \int_0^\Theta (2 \sin \theta \cos \theta g + \sin^2 \theta g') \left(\frac{\lambda}{2} u^2 + \frac{1}{2^*} u^{2^*} \right) d\theta. \end{aligned}$$

Sei $g(0) = 0$ und $g(\theta) > 0$ für $\theta \in (0, \Theta)$, dann erhalten wir die Identität:

$$\begin{aligned} - \frac{1}{2} \sin^2 \Theta g(\Theta) u'^2(\Theta) + \int_0^\Theta \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta g' - (n-2) \sin \theta \cos \theta g \right) u'^2 d\theta \\ = - \int_0^\Theta (2 \sin \theta \cos \theta g + \sin^2 \theta g') \left(\frac{\lambda}{2} u^2 + \frac{1}{2^*} u^{2^*} \right) d\theta. \end{aligned}$$

Mit der Notation $h(\theta) = \frac{1}{2} \sin^2 \theta g'(\theta) - (n-2) \sin \theta \cos \theta g(\theta)$ folgt:

$$\begin{aligned} - \frac{1}{2} \sin^2 \Theta g(\Theta) u'^2(\Theta) + \int_0^\Theta h u'^2 d\theta \\ = - \int_0^\Theta 2(h + (n-1) \sin \theta \cos \theta g) \left(\frac{\lambda}{2} u^2 + \frac{1}{2^*} u^{2^*} \right) d\theta. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Wir testen die Gleichung (2.27) nochmals mit der Funktion $h u$ und erhalten

$$\begin{aligned} & - \left[h u u' \right]_0^\Theta + \int_0^\Theta h u'^2 d\theta + \left[\frac{1}{2} h' u^2 \right]_0^\Theta - \frac{1}{2} \int_0^\Theta h'' u^2 d\theta \\ & - \left[\frac{n-1}{2} \cot \theta h u^2 \right]_0^\Theta + \frac{n-1}{2} \int_0^\Theta (\cot \theta h)' u^2 d\theta = \int_0^\Theta h(\lambda u^2 + u^{2*}) d\theta. \end{aligned}$$

Aus $g(0) = 0$ und $h'(\theta) = (n-2)g(\theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - (n-3) \sin \theta \cos \theta g'(\theta) + \frac{1}{2} \sin^2 \theta g''(\theta)$ erhalten wir

$$\int_0^\Theta h u'^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_0^\Theta (h'' - (n-1)(\cot \theta h)') u^2 d\theta = \int_0^\Theta h(\lambda u^2 + u^{2*}) d\theta. \quad (2.29)$$

Subtraktion der beiden Gleichungen (2.28) und (2.29) ergibt

$$\begin{aligned} & \int_0^\Theta \left(\frac{1}{2} h'' - \frac{(n-1)}{2} (\cot \theta h)' + \lambda(2h + (n-1) \sin \theta \cos \theta g) \right) u^2 d\theta \\ & = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta g(\Theta) u'^2(\Theta) \\ & + \int_0^\Theta \left(2 \frac{n-1}{n} h - \frac{(n-1)(n-2)}{n} \sin \theta \cos \theta g \right) u^{2*} d\theta. \end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} h'' - \frac{(n-1)}{2} (\cot \theta h)' + \lambda(2h + (n-1) \sin \theta \cos \theta g), \\ C &= 2 \frac{n-1}{n} h - \frac{(n-1)(n-2)}{n} \sin \theta \cos \theta g. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Identität

$$\int_0^\Theta B u^2 d\theta = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta g(\Theta) u'^2(\Theta) + \int_0^\Theta C u^{2*} d\theta. \quad (2.30)$$

Die Nichtexistenz für eine positive Lösung folgt, falls $B < 0$, $C > 0$, $g(0) = 0$ und $g(\Theta) > 0$ gilt. Die Funktion h in B und C explizit eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{4} \left(-2(n-3)(n-2+\lambda)g(\theta) \sin(2\theta) + \right. \\ & \quad + (2-3n+n^2+2\lambda+(13+(n-8)n-2\lambda) \cos(2\theta))g'(\theta) \\ & \quad \left. + \sin(\theta)(-3(n-3) \cos(\theta)g''(\theta) + \sin(\theta)g^{(3)}(\theta)) \right) \\ C &= \frac{n-1}{n} \sin(\theta) \left((n-2) \cos(\theta)g(\theta) - \sin(\theta)g'(\theta) \right). \end{aligned}$$

Für $g(\theta) = \sin^{n-3} f(\theta)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{8} \sin(\theta)^{n-4} [2(n-3)(n-1) \cos(\theta) f(\theta) \\ &\quad - (5 + (n-6)n - 4\lambda + ((n-1)^2 + 4\lambda) \cos(2\theta)) \sin(\theta) f'(\theta) \\ &\quad + 2 \sin(\theta)^3 f^{(3)}(\theta)], \\ C &= \frac{n-1}{n} (\sin(\theta)^{n-2} (\cos(\theta) f(\theta) - \sin(\theta) f'(\theta))). \end{aligned}$$

1. Mit $f(\theta) = \sin(\theta)$ erhalten wir

$$C \equiv 0$$

und

$$B = \left(\frac{n(n-2)}{4} + \lambda \right) \cos(\theta) \sin(\theta)^{n-1}.$$

Für $\lambda < -\frac{n(n-2)}{4}$ folgt somit die Nichtexistenz für $\Theta \in (0, \pi/2)$.

2. Für $n = 3$ erhält man das Resultat von Bandle und Benguria.

Um einen Widerspruch in der Identität (2.30) zu erhalten, muss die Differentialgleichung $B = 0$ für f gelöst werden. Dies ist für ein beliebiges $n > 3$ schwierig. \square

Eindeutigkeit von Lösungen

Die Eindeutigkeit der Lösungen aus den Sätzen 2.13 und 2.14 kann für den Fall $\Omega = B_R(0)$ mit Hilfe des Eindeutigkeitsatzes von Kwong und Li [34] sehr einfach verifiziert werden.

Satz 2.20 (Kwong und Li) Sei $g \in C^0([0, R])$ und

$$G(r) := r^\gamma g(r) - L r^{\gamma-2}$$

mit

$$\gamma = \frac{2(n-1)(s-1)}{s+3} \quad \text{und} \quad L = \frac{2(n-1)((n-1)-s-3)}{(s+3)^2}.$$

Zudem existiere ein $\xi \in [0, R]$ so, dass G nichtfallend in $[0, \xi]$ und G nichtwachsend in $[\xi, R]$ ist. Dann hat das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u - g(|x|) u &= u^s && \text{in } B_R(0) \\ u &> 0 && \text{in } B_R(0) \\ u &= 0 && \text{auf } \partial B_R(0) \end{aligned}$$

für $s > 1$ höchstens eine rotationssymmetrische Lösung.

Es gilt das folgende Resultat:

Satz 2.21 Sei $\Omega = B_R(0)$ mit $n \geq 3$ und $\lambda > -\frac{n(n-2)}{4}$, dann existiert höchstens eine Lösung für das Problem (2.19).

Beweis: Wir wenden den Satz 2.20 auf das Problem 2.19 an. Mit den Bezeichnungen aus dem Satz gilt

$$\begin{aligned} s &= \frac{n+2}{n-2} > 1 \\ g(|x|) &= \left(\frac{n(n-2)}{4} + \lambda \right) \rho^2 \\ \gamma &= 2 \quad \text{und} \quad L = \frac{1}{8}(n-2)(n-6). \end{aligned}$$

Für $G(r)$ erhalten wir

$$G(r) = r^2 \left(\frac{n(n-2)}{4} + \lambda \right) \rho^2 - \frac{1}{8}(n-2)(n-6).$$

Es bleibt zu zeigen, dass ein $\xi \in [0, R]$ existiert mit $G(r)$ nichtfallend für $r \in [0, \xi]$ und nichtwachsend für $r \in [\xi, R]$. In den geodätischen Koordinaten erhalten wir

$$G(\theta) = \left(\frac{n(n-2)}{4} + \lambda \right) \sin^2 \theta - \frac{1}{8}(n-2)(n-6), \quad \theta \in (0, \Theta).$$

Da nach Voraussetzung $\lambda > -\frac{n(n-2)}{4}$ gilt, folgt die Eindeutigkeit der rotationssymmetrischen Lösungen mit $\xi = \min\{\Theta, \pi/2\}$. Aus der Tatsache, dass in geodätischen Kugeln Lösungen von (2.19) für $\lambda > -\frac{n(n-2)}{4}$ rotationssymmetrisch sind, folgt die Behauptung (siehe Brock und Prajapat [15], Theorem 5). □

Bemerkung 2.22 Im Gegensatz zum Brezis-Nirenberg-Problem im euklidischen bzw. hyperbolischen Raum gilt die Eindeutigkeit von rotationssymmetrischen Lösungen im sphärischen Raum nicht für alle $\lambda < 0$. Im Kapitel 2.9 werden wir sehen, dass zumindest numerisch in grossen Kugeln für $\lambda \ll -\frac{n(n-2)}{4}$ viele Lösungen berechnet werden können. —

2.5.2 $p \neq 2$

Im Folgenden betrachten wir den nichtlinearen Fall $p \neq 2$:

$$\begin{aligned} -\Delta_{p, \mathbb{S}^n} u - \lambda u^{p-1} &= u^{p^*-1} \quad \text{in } \Omega' \subset \mathbb{S}^n \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega' \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega'. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Das äquivalente Problem in \mathbb{R}^n ist wiederum gegeben durch

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\rho^{n-p}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \lambda\rho^n u^{p^*-1} &= \rho^n u^{p^*-1} && \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &> 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Nach dem Theorem I von Egnell in [21] existiert ein $\lambda^* < \lambda_1$ so, dass das Problem (2.32) eine Lösung für $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_1)$ hat, wobei λ_1 der kleinste positive Eigenwert des p -Laplace-Beltrami-Operators mit Dirichlet-Randwert bezeichnet. Für gewisse p können wir im Folgenden die Konstante λ^* genauer bestimmen. Aus dem Satz 2.7 folgt für rotationssymmetrische Lösungen das Korollar:

Korollar 2.23 *Sei $\Omega = B_R(0)$ mit $R < R_0$, wobei R_0 aus dem Satz 2.7 gegeben sei und $p \geq \frac{n+2}{3}$. Dann ist $\lambda_{\text{rot}}^* \geq 0$ für rotationssymmetrische Lösungen von (2.32), wobei $\lambda_{\text{rot}}^* = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \text{für } \lambda \text{ existiert eine rotationssymmetrische Lösung von (2.32)}\}$.*

Bemerkung 2.24 Im Fall $p = 2$ und $n = 3$ existiert für $\lambda < 0$ keine Lösung in Kugeln $B_R(0)$ mit $R < 1$ (siehe Abbildung 2.4, $n = 3$). Es stellt sich die Frage, ob dies auch auf Sphären mit Dimension $n > 3$ möglich ist. Der Satz 2.7 gibt dazu insofern eine Antwort, als dass $R_0 = 1$ für $p = \frac{n+1}{2}$ gilt (siehe Abbildung 2.2). In Kugeln mit $R < R_0 = 1$ folgt somit $\lambda_{\text{rot}}^* \geq 0$. Das Verhalten kann daher in beliebigen Dimensionen in einem p -Laplace Problem mit $p = \frac{n+1}{2}$ beobachtet werden. □

Aus dem Satz 2.3 folgt die Existenz von Lösungen für das Problem (2.32). Das Resultat sei an dieser Stelle als Korollar nochmals zitiert:

Korollar 2.25 *Sei $n \geq 3$ und $p < \frac{n+2}{3}$, dann existiert eine Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ für (2.32) mit $0 \leq \lambda < \lambda_1$. Insbesondere gilt $\lambda^* < 0$.*

Bemerkung 2.26 Für $p \geq \frac{n+2}{3}$ und $\Omega = B_R(0)$ mit $R < R_0$ folgt aus dem Satz 2.7, dass $0 < \lambda_{\text{rot}}^* < \lambda_1$ für rotationssymmetrische Lösungen gilt. Zudem wird die Konstante $S_{p,p^*}(\Omega, \rho^{n-p}, \rho^n)$ in dem Fall nicht angenommen (siehe Bandle et al. [6], Corollary 4.4). Um λ^* genauer beschreiben zu können, müsste für den p -Laplace ebenfalls eine Transformation in ein nicht gewichtetes p -Laplace Problem, wie im Lemma A.1 für $p = 2$ gegeben, bekannt sein oder eine explizite Lösung des Problems

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\rho^{n-p}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= \rho^n u^{p^*-1} && \text{in } \mathbb{R}^n \\ u &> 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \\ u(x) &\rightarrow 0 && \text{für } |x| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

so, dass die Konstante $S_p(\Omega, \rho^{n-p}, \rho^n)$ besser abgeschätzt werden kann. □

Das folgende Nichtexistenzresultat ist ein Spezialfall des im Allgemeinen bewiesenen Satzes von Peletier und Serrin [21]. Der Vollständigkeit halber sei hier der Beweis gegeben.

Satz 2.27 *Das Problem (2.32) hat für $\lambda \geq \lambda_1$ keine Lösung, wobei λ_1 der kleinste Eigenwert des p -Laplace-Beltrami-Operators $-\Delta_p$ mit Dirichlet-Randbedingung bezeichnet.*

Beweis: Sei $\lambda \geq \lambda_1$ und $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ eine Lösung von (2.32). Dann existiert ein Gebiet $\tilde{\Omega} \subset \subset \Omega$ und eine Konstante $\gamma < 1$ so, dass

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\rho^{n-p}|\nabla v|^{p-2}\nabla v) &= \gamma \rho^n (\lambda_1 + u^{p^*-p})v^{p-1} \quad \text{in } \tilde{\Omega} \\ v &= 0 \quad \text{auf } \partial\tilde{\Omega} \end{aligned} \quad (2.33)$$

eine positive Lösung u_0 besitzt. Die Lösung erhält man als Minimierer von

$$\inf_{\substack{v \in W_0^{1,p}(\tilde{\Omega}) \\ v \neq 0}} \frac{\int_{\tilde{\Omega}} \rho^{n-p}|\nabla v|^p dx}{\int_{\tilde{\Omega}} \rho^n (\lambda_1 + u^{p^*-p})v^p dx}.$$

Wir wenden $(u_0 - u)_+ \in W_0^{1,p}(\tilde{\Omega})$ als Testfunktion auf (2.32) und (2.33) an und erhalten

$$\int_{u_0 > u} \rho^{n-p}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(u_0 - u) dx = \int_{u_0 > u} \rho^n (\lambda_1 + u^{p^*-p})u^{p-1}(u_0 - u) dx$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{u_0 > u} \rho^{n-p}|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla(u_0 - u) dx \\ = \int_{u_0 > u} \rho^n (\lambda_1 + u^{p^*-p})\gamma u_0^{p-1}(u_0 - u) dx. \end{aligned}$$

Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} \int_{u_0 > u} \rho^{n-p}(|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)(\nabla u_0 - \nabla u) dx = \\ \int_{u_0 > u} \rho^n ((\lambda_1 + u^{p^*-p})\gamma u_0^{p-1} - (\lambda_1 + u^{p^*-p})u^{p-1})(u_0 - u) dx. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\lambda \geq \lambda_1$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} \int_{u_0 > u} \rho^{n-p}(|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)(\nabla u_0 - \nabla u) dx \\ \leq \int_{u_0 > u} \rho^n ((\lambda_1 + u^{p^*-p})(\gamma u_0^{p-1} - u^{p-1}))(u_0 - u) dx. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Sei u_0 so normiert, dass $\sup(\gamma u_0^{p-1} - u^{p-1}) = 0$ gilt, womit die rechte Seite der Ungleichung (2.34) negativ wird. Die linke Seite ist jedoch nach Lemma 4.10 in Diaz [20] strikt positiv. Somit erhalten wir einen Widerspruch und folglich die Aussage des Satzes. \square

2.6 Der superlineare Fall

2.6.1 $p = 2$

Wir betrachten das in null superlineare Problem:

$$\begin{aligned} -\Delta_{\mathbb{S}^n} u - \lambda u^{q-1} &= u^{2^*-1} \quad \text{in } \Omega' \subset \mathbb{S}^n \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega' \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega', \end{aligned} \tag{2.35}$$

wobei $1 < q < 2$. Mit Hilfe der stereographischen Projektion ist das äquivalente Problem in \mathbb{R}^n gegeben durch

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\rho^{n-2} \nabla u) - \lambda \rho^n u^{q-1} &= \rho^n u^{2^*-1} \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Eine erste Lösung von (2.36) erhalten wir als Minimierer des zum Funktional

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho^{n-2} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{q} \int_{\Omega} \rho^n |u|^q dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} \rho^n |u|^{2^*} dx$$

zugehörigen abgeschnittenen Funktionals J_λ , wie im Kapitel 1.3.1. Es gilt der Satz:

Satz 2.28 *Es existiert ein $\lambda_0 > 0$ so, dass für alle $0 < \lambda < \lambda_0$ das zu (2.36) gehörige Funktional I_λ einen Minimierer $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit*

$$I_\lambda(u_0) = C_0 < 0$$

hat.

Beweis: Folgt direkt aus dem Satz 1.8

□

Um die Existenz einer zweiten Lösung zu erhalten, betrachten wir das Funktional $I_\lambda^+ : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$I_\lambda^+(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\rho^{n-2} |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{q} \rho^n (u^+)^q - \frac{1}{2^*} \rho^n (u^+)^{2^*} \right) dx.$$

Korollar 2.29 *Aus dem Lemma 1.10 folgt, dass u_0 ein lokales Minimum von I_λ^+ ist.*

Satz 2.30 *Sei $n \geq 3$, dann existiert für alle $\lambda \in (0, \lambda_0)$ eine zweite Lösung $u_1 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ für das Problem (2.36) mit $u_1 > u_0$.*

Beweis: Für den Beweis des Satzes verwenden wir die Methode von Ambrosetti, Brezis und Cerami [2]. Sei λ fest und u_0 der dazu gehörige Minimierer aus dem Satz 2.28. Wir suchen eine Lösung u_1 in der Form $u_1 = u_0 + v$. Für das Problem (2.36) folgt

$$-\operatorname{div}(\rho^{n-2}(\nabla u_0 + \nabla v)) - \lambda \rho^n (u_0 + v)^{q-1} = \rho^n (u_0 + v)^{2^*-1},$$

wobei der Minimierer u_0 die Differentialgleichung

$$-\operatorname{div}(\rho^{n-2}\nabla u_0) - \lambda \rho^n u_0^{q-1} = \rho^n u_0^{2^*-1}$$

erfüllt. Durch Subtraktion der beiden Gleichungen erhalten wir die folgende Differentialgleichung für v :

$$-\operatorname{div}(\rho^{n-2}\nabla v) = \lambda \rho^n ((u_0 + v)^{q-1} - u_0^{q-1}) + \rho^n ((u_0 + v)^{2^*-1} - u_0^{2^*-1}).$$

Wir definieren die Funktion

$$g(x, s) := \begin{cases} \lambda((u_0 + s)^{q-1} - u_0^{q-1}) + (u_0 + s)^{2^*-1} - u_0^{2^*-1} & \text{für } s \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit $G(x, s) := \int_0^s g(x, s) ds$ sei die Stammfunktion von g bezeichnet. G ist gegeben durch

$$G(x, v) = \begin{cases} \frac{\lambda}{q} ((u_0 + v)^q - u_0^q) + \frac{1}{2^*} ((u_0 + v)^{2^*} - u_0^{2^*}) \\ -\lambda u_0^{q-1} v - u_0^{2^*-1} v & \text{für } v \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir betrachten nun das Funktional $E : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$E(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho^{n-2} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} \rho^n G(x, v) dx.$$

Das Ziel ist, die Existenz eines kritischen Punktes von E mit Hilfe des Mountainpass-Lemmas zu beweisen, wobei wir $v = 0$ als lokales Minimum verwenden. Das Funktional E muss zudem die lokale Palais-Smale-Bedingung $(P-S)_\beta$ erfüllen. Falls $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $v \neq 0$ ein kritischer Punkt von E ist, folgt aus dem Maximumprinzip (siehe Gilbarg und Trudinger [28]), dass v positiv in Ω ist. Unter dieser Voraussetzung erhalten wir eine zweite positive Lösung $u_1 = u_0 + v$ von (2.35), wobei $u_1 \neq u_0$ gilt. Wir beweisen daher im nächsten Schritt das Lemma:

Lemma 2.31 $v = 0$ ist ein lokales Minimum von E in $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Beweis: Sei

$$f(x, s) = \begin{cases} \lambda s^{q-1} + s^{2^*-1} & \text{für } s \geq 0 \\ 0 & \text{für } s < 0 \end{cases}$$

und $F(x, v) = \int_0^v f(x, s) ds$. Für ein beliebiges $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt

$$G(x, v^+) - F(x, v_0 + v^+) = -\frac{\lambda}{q} v_0^q - \lambda v_0^{q-1} v^+ - \frac{1}{2^*} v_0^{2^*} - v_0^{2^*-1} v^+$$

und somit mit $\|v\|^2 = \int_{\Omega} \rho^{n-2} |\nabla v|^2 dx$

$$\begin{aligned} E(v) &= \frac{1}{2} (\|v^+\|^2 + \|v^-\|^2) - \int_{\Omega} \rho^n G(x, v^+) dx \\ &= \frac{1}{2} (\|v^+\|^2 + \|v^-\|^2) - \int_{\Omega} \rho^n F(x, u_0 + v^+) dx + \\ &\quad + \int_{\Omega} \rho^n \left(\frac{\lambda}{q} u_0^q + \lambda u_0^{q-1} v^+ + \frac{1}{2^*} u_0^{2^*} + u_0^{2^*-1} v^+ \right) dx \\ &= \frac{1}{2} (\|v^+\|^2 + \|v^-\|^2) - \int_{\Omega} \rho^n F(x, u_0 + v^+) dx + \\ &\quad + \int_{\Omega} \rho^n F(x, u_0) dx + \int_{\Omega} \rho^n f(x, u_0) v^+ dx. \end{aligned}$$

Für $I_{\lambda}^+(u_0 + v^+)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} I_{\lambda}^+(u_0 + v^+) &= \frac{1}{2} (\|u_0\|^2 + \|v^+\|^2) + \int_{\Omega} \rho^{n-2} \nabla u_0 \cdot \nabla v^+ dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \rho^n F(x, u_0 + v^+) dx \\ &= \frac{1}{2} (\|u_0\|^2 + \|v^+\|^2) + \int_{\Omega} \rho^n f(x, u_0) v^+ dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \rho^n F(x, u_0 + v^+) dx. \end{aligned}$$

Somit folgt für $E(v)$ in Termen von I_{λ}^+

$$\begin{aligned} E(v) &= \frac{1}{2} \|v^-\|^2 + I_{\lambda}^+(u_0 + v) - \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \int_{\Omega} \rho^n F(x, u_0) dx \\ &= \frac{1}{2} \|v^-\|^2 + I_{\lambda}^+(u_0 + v^+) - I_{\lambda}^+(u_0). \end{aligned}$$

Da u_0 ein lokales Minimum von I_{λ}^+ ist, folgt unter der Voraussetzung $\|v\| < \varepsilon$, mit $\varepsilon > 0$ genügend klein

$$E(v) \geq \frac{1}{2} \|v^-\|^2 \geq 0.$$

□

Lemma 2.32 $E(v)$ erfüllt die lokale Palais-Smale-Bedingung $(P.-S.)_{\beta}$ mit

$$\beta = \frac{1}{n} S_2^{n/2}.$$

Beweis: Folgt analog zu Lemma 1.4. □

Für alle $v > 0$ gilt $E(tv) \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow \infty$. Wir wählen für v die spezielle Testfunktion $v = \rho^{-\frac{n-2}{2}} \psi_\varepsilon$ analog zu Kapitel 2.5.1. Sei $t_\varepsilon > 0$ so, dass $E(t_\varepsilon \rho^{-\frac{n-2}{2}} \psi_\varepsilon) < 0$ gilt. Zudem sei

$$\Gamma_\varepsilon = \{\gamma \in C([0, 1], W_0^{1,2}(\Omega)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = t_\varepsilon \rho^{-\frac{n-2}{2}} \psi_\varepsilon\}$$

und

$$c_\varepsilon = \inf_{\gamma \in \Gamma_\varepsilon} \max\{E(\gamma(t)) : t \in [0, 1]\}. \quad (2.37)$$

Mit Hilfe des Mountainpass-Lemmas erhalten wir eine konvergente Palais-Smale-Folge, falls $c_\varepsilon < 1/n S_2^{n/2}$ gilt.

Lemma 2.33 *Es gilt*

$$c_\varepsilon \leq \sup_{t \geq 0} E(t \rho^{-\frac{n-2}{2}} \psi_\varepsilon) < \frac{1}{n} S_2^{n/2}$$

für $\varepsilon > 0$ genügend klein.

Für den Beweis benötigen wir die folgende Ungleichung: Für alle $p > 1$ existiert ein $\alpha = \alpha(p) > 0$ so, dass

$$(a + b)^p \geq a^p + b^p + \alpha a^{p-1}b, \quad \forall a, b \geq 0. \quad (2.38)$$

Für einen Beweis der Ungleichung sei auf Ambrosetti, Brezis und Cerami[2] verwiesen.

Beweis von Lemma 2.33:

1. Fall $n \geq 4$. Mit der Ungleichung (2.38) folgt

$$g(x, s) \geq s^{2^*-1} + \alpha u_0^{2^*-1} s \quad \text{für } s > 0.$$

Aus dem Lemma 2.15 und dem Lemma A.1 folgt

$$\begin{aligned} E(t \rho^{-\frac{n-2}{2}} \psi_\varepsilon) &\leq \frac{1}{2} t^2 \int_\Omega |\nabla \psi_\varepsilon|^2 dx - \frac{t^{2^*}}{2^*} \int_\Omega \psi_\varepsilon^{2^*} dx - \frac{1}{2} \alpha t^2 \int_\Omega u_0^{\frac{4}{n-2}} \psi_\varepsilon^2 dx \\ &\leq \begin{cases} \frac{1}{n} S_2^{n/2} - C \varepsilon^2 + O(\varepsilon^{n-2}) & \text{für } n > 4 \\ \frac{1}{4} S_2^2 - C \varepsilon^2 \log(\varepsilon) + O(\varepsilon^2) & \text{für } n = 4 \end{cases}. \end{aligned}$$

Für ein $\varepsilon > 0$ genügend klein folgt die Behauptung.

2. Fall $n = 3$. In dem Fall schätzen wir die Funktion g etwas anders ab. Wir verwenden die Ungleichung

$$(a + b)^5 \geq a^5 + b^5 + 5ab^4$$

und erhalten für g

$$G(x, s) \geq \frac{1}{6}s^6 + u_0s^5 \quad \text{für } s \geq 0$$

und somit

$$E(t\rho^{-\frac{1}{2}}\psi_\varepsilon) \leq \frac{1}{2}t^2 \int_{\Omega} |\nabla\psi_\varepsilon|^2 dx - \frac{t^6}{6} \int_{\Omega} \psi_\varepsilon^6 dx - Ct^5 \int_{\Omega} \psi_\varepsilon^5 dx.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{\Omega} |\nabla\psi_\varepsilon|^2 dx = S_2^{3/2} + O(\varepsilon) \\ C_2 &= \int_{\Omega} \psi_\varepsilon^6 dx = S_2^{3/2} + O(\varepsilon^3) \\ C_3 &= C \int_{\Omega} \psi_\varepsilon^5 dx = C\varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon^{5/2}) \end{aligned} \tag{2.39}$$

mit $C > 0$. Sei

$$d(\varepsilon) = \max_{t \geq 0} \left\{ \frac{1}{2}C_1 t^2 - \frac{1}{6}t^6 C_2 - \frac{1}{5}t^5 C_3 \right\}.$$

Das Maximum $d(\varepsilon)$ wird bei $\tilde{t} = \tilde{t}(\varepsilon)$ angenommen, für welches

$$C_1 = C_2 \tilde{t}^4 + C_3 \tilde{t}^3$$

gilt. Aus (2.39) erhalten wir für \tilde{t}

$$\tilde{t}(\varepsilon) = 1 - \frac{C}{4S_2^{3/2}}\varepsilon^{1/2} + o(\varepsilon^{1/2})$$

und somit für

$$d(\varepsilon) = \frac{1}{3}S_2^{3/2} - \frac{C}{3}\varepsilon^{1/2} + o(\varepsilon^{1/2}).$$

Für $\varepsilon > 0$ klein genug folgt $c_\varepsilon \leq d(\varepsilon) < \frac{1}{3}S_2^{3/2}$.

□

Schluss des Beweises des Satzes 2.30. Für das Funktional E existiert eine Umgebung U so, dass $E(v) \geq c > 0$ für $v \in \partial U$ gilt. Ferner existiert ein $t_0 \geq 0$ mit $E(t_0\rho^{-\frac{n-2}{2}}\psi_\varepsilon) < 0$. Aus dem Mountainpass-Lemma erhalten wir für das Funktional E eine Palais-Smale-Folge $\{v_j\}$ mit $E(v_j) \rightarrow c$ für $j \rightarrow \infty$. Aus dem Lemma 2.33 folgt $c \leq c_\varepsilon < 1/nS_2^{n/2}$ und somit aus dem Lemma

2.32 die Konvergenz der Folge. Aus dem Maximumprinzip folgt $v > 0$ in Ω (siehe Gilbarg und Trudinger [28]). Wir erhalten somit eine zweite Lösung $u_1 = u_0 + v$ von (2.36). Es folgt die Behauptung. \square

Für das folgende zu Ambrosetti, Brezis und Cerami [2] analoge Resultat, benötigen wir das Lemma:

Lemma 2.34 *Sei z die eindeutige Lösung von*

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\rho^{n-2}\nabla z) &= \rho^n z^{q-1} \quad \text{in } \Omega \\ z &> 0 \quad \text{in } \Omega \\ z &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Dann existiert ein $\gamma > 0$ mit

$$\int_{\Omega} (\rho^{n-2}|\nabla\phi|^2 - \rho^n(q-1)z^{q-2}\phi^2) dx \geq \gamma \int_{\Omega} \rho^n \phi^2 dx \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{2.41}$$

Wir bezeichnen γ als den kleinsten positiven Eigenwert von $-\operatorname{div}(\rho^{n-2}\nabla\cdot) - (q-1)\rho^n z^{q-2}$ mit Dirichlet-Randwert.

Beweis: z kann als Minimierer von $E : W_0^{1,2} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$E(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho^{n-2} |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} \rho^n |v|^q dx,$$

gefunden werden. Analog zu Lemma 3.5 in [2] folgt, dass die Bilinearform D^2E in z positiv semidefinit ist. (Die Spektraltheorie für $-\operatorname{div}(\rho^{n-2}\nabla\cdot) - a(x)$ kann auch für ein $a(x) = +\infty$ auf $\partial\Omega$ in den $W_0^{1,2}(\Omega)$ übertragen werden, siehe Bemerkung 3.1 in [2].) Daher gilt

$$\int_{\Omega} (\rho^{n-2}|\nabla\phi|^2 - (q-1)\rho^n z^{q-2}\phi^2) dx \geq 0 \quad \forall \phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

oder äquivalent: der kleinste Eigenwert λ_1 von $-\operatorname{div}(\rho^{n-2}\nabla\cdot) - (q-1)\rho^n z^{q-2}$ mit Dirichlet-Randwert ist nicht negativ. Die Aussage des Lemmas folgt, falls $\lambda_1 > 0$ gilt. Wir nehmen $\lambda_1 = 0$ im Widerspruch an. Dann existiert ein $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\phi > 0$ mit

$$-\operatorname{div}(\rho^{n-2}\nabla\phi) - (q-1)\rho^n z^{q-2}\phi = 0.$$

ϕ erfüllt die Gleichung

$$\int_{\Omega} \rho^{n-2}\nabla\phi\nabla z dx = (q-1) \int_{\Omega} \rho^n z^{q-1}\phi dx = 0.$$

Aus der Voraussetzung (2.40) folgt jedoch für z

$$\int_{\Omega} \rho^{n-2} \nabla \phi \nabla z dx = \int_{\Omega} \rho^n z^{q-1} \phi dx = 0.$$

Da $1 < q < 2$ gilt, haben wir einen Widerspruch zur Annahme. Es folgt die Behauptung mit $\gamma = \lambda_1$. \square

Die Lösungen u_0 , deren Existenz durch Minimieren eines abgeschnittenen Funktionals J_λ bewiesen wird, sind im Sinne des folgenden Satzes eindeutig:

Satz 2.35 *Für alle $\lambda \in (0, \lambda_0)$ existiert für das Problem (2.35) höchstens eine Lösung u_0 mit*

$$|u_0|_\infty \leq A = \left(\frac{\gamma}{2^{*} - 1} \right)^{\frac{1}{2^{*} - 2}},$$

wobei $\gamma > 0$ den kleinsten Eigenwert von $-\operatorname{div}(\rho^{n-2} \nabla \cdot) - (q-1)\rho^n z^{q-2}$ mit Dirichlet-Randwert bezeichnet, und $z \in W_0^{1,2}(\Omega)$ die eindeutige Lösung von (2.40) ist.

Eine offene Frage ist, ob aus $q \nearrow p$ für die Konstante $A \searrow 0$ folgt. Dies würde die Beobachtung 2(a) im später folgenden Kapitel 2.8 über den Grenzfall beantworten.

Beweis: Sei $A > 0$ so, dass

$$(2^{*} - 1) A^{2^{*} - 2} < \gamma,$$

wobei γ der Wert aus dem obigen Lemma ist. Im Widerspruch nehmen wir an, dass eine zweite Lösung $w = u_0 + v$ mit $|w|_\infty \leq A$ existiert, wobei u_0 der Minimierer von (2.36) für ein festes $\lambda \in (0, \lambda_0)$ sei. Es kann gezeigt werden, dass u_0 eine Minimallösung von (2.36) ist (mit der Methode II in [11], siehe auch [2]). Für v folgt daher $v > 0$ in Ω . Sei $\zeta(x) = \lambda^{1/(2-q)} z(x)$, wobei z der Gleichung (2.40) genüge. Dann erfüllt ζ

$$-\operatorname{div}(\rho^{n-2} \nabla \zeta) = \lambda \rho^n \zeta^{q-1}.$$

Zudem gilt für u_0

$$-\operatorname{div}(\rho^{n-2} \nabla u_0) \geq \lambda \rho^n u_0^{q-1}.$$

Analog zu Lemma 3.3 in Ambrosetti, Brezis und Cerami [2] gilt $u_0 \geq \lambda^{\frac{1}{2-q}} z$ und somit

$$u_0^{q-2} \leq \lambda^{-1} z^{q-2}. \quad (2.42)$$

Da $w = u_0 + v$ eine Lösung von (2.36) ist, erfüllt w die Gleichung

$$-\operatorname{div}(\rho^{n-2} \nabla (u_0 + v)) = \lambda \rho^n (u_0 + v)^{q-1} + \rho^n (u_0 + v)^{2^{*}-1},$$

und aus der Konkavität von v^{q-1} folgt

$$\lambda \rho^n (u_0 + v)^{q-1} \leq \lambda \rho^n u_0^{q-1} + \lambda (q-1) u_0^{q-2} v.$$

Wir erhalten somit für v die Ungleichung

$$-\operatorname{div}(\rho^{n-2} \nabla v) \leq \lambda \rho^n (q-1) u_0^{q-2} v + \rho^n (u_0 + v)^{2^*-1} - \rho^n u_0^{2^*-1}$$

und mit (2.42) folgt

$$-\operatorname{div}(\rho^{n-2} \nabla v) \leq \rho^n (q-1) z^{q-2} v + \rho^n (u_0 + v)^{2^*-1} - \rho^n u_0^{2^*-1}. \quad (2.43)$$

Andererseits haben wir vorausgesetzt, dass $w = u_0 + v \leq A$ und somit

$$(u_0 + v)^{2^*-1} - u_0^{2^*-1} \leq (2^* - 1) A^{2^*-2} v$$

gilt. Für die Ungleichung (2.43) folgt

$$-\operatorname{div}(\rho^{n-2} \nabla v) - \rho^n (q-1) z^{q-2} v \leq (2^* - 1) \rho^n A^{2^*-2} v.$$

Mit v getestet erhalten wir

$$\int_{\Omega} \rho^{n-2} |\nabla v|^2 - \rho^n (q-1) z^{q-2} v^2 dx \leq (2^* - 1) \int_{\Omega} \rho^n A^{2^*-2} v^2 dx.$$

Aus dem obigen Hilfslemma folgt

$$\gamma \int_{\Omega} \rho^n v^2 dx \leq (2^* - 1) A^{2^*-2} \int_{\Omega} \rho^n v^2 dx.$$

Da nach Voraussetzung $\gamma > (2^* - 1) A^{2^*-2}$ folgt $v = 0$ und damit die Behauptung. □

Im Fall, dass das Problem (2.36) für $\lambda = 0$ keine Lösung hat (vergleiche Abbildung 2.4), folgt für die Mountainpass-Lösungen u_1 das Korollar:

Korollar 2.36 *Sei $n = 3$ und $\Omega = B_R(0)$ mit $R < 1$. Dann gilt $|u_1|_{\infty} \rightarrow \infty$ für $\lambda \searrow 0$, wobei u_1 die Mountainpass-Lösung von (2.36) bezeichnet.*

Beweisidee: Der Beweis folgt per Widerspruch. Wir nehmen an, dass eine Folge von Lösungen $u_{\lambda_j} \neq u_{0\lambda_j}$ für $\lambda_j \searrow 0$ mit $|u_{\lambda_j}|_{\infty} \leq C$ existiert, wobei mit $u_{0\lambda_j}$ die Minimallösungen bezeichnet seien. Aus dem Satz 2.35 folgt, dass eine Konstante $A > 0$ existiert so, dass $|u_{\lambda_j}|_{\infty} > A$ für j gross gilt. Mit Hilfe von elliptischen Ungleichungen kann andererseits eine, zu einem $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$, gleichmässig konvergente Teilfolge $u_{\lambda_{j_n}}$ von u_{λ_j} gewählt werden, mit

$$-\Delta_{\mathbb{S}^3} w = w^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Da $\Omega = B_R(0)$ mit $R < 1$, gilt $w = 0$ im Widerspruch zur Annahme. □

Existenz einer nichttrivialen Lösung für $\lambda < 0$

Falls für $\lambda = 0$ eine nichttriviale Lösung existiert, kann wegen des globalen Fortsetzungssatzes (siehe Bandle und Reichel [9]) angenommen werden, dass für $\lambda < 0$ mit $|\lambda|$ klein eine nichttriviale Lösung existiert. Als erstes werden wir zeigen, dass $v_0 = 0$ ein lokales Minimum des Funktionals I_λ^+ für $\lambda < 0$ ist. Unter den Voraussetzungen, I_λ^+ erfüllt für negative λ die Bedingung (P.-S.) $_{\tilde{\beta}}$ für ein gewisses $\tilde{\beta} \in \mathbb{R}$ und I_λ^+ hat einen Mountainpass unterhalb diesem kritischen Niveau $\tilde{\beta}$, folgt aus dem Mountainpass-Lemma eine nichttriviale Lösung v_1 . Da im subkritischen Fall das Funktional I_λ^+ die Bedingung (P.-S.) $_{\tilde{\beta}}$ für ein beliebiges $\tilde{\beta} \in \mathbb{R}$ erfüllt, erhält man eine nichttriviale Lösung für alle $\lambda < 0$.

Lemma 2.37 $v = 0$ ist ein lokales Minimum für $\lambda < 0$ von I_λ^+ .

Beweis: Es gilt $I_\lambda^+(0) = 0$. Sei $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $v \neq 0$ mit $\|v\| = \varepsilon$. Dann gilt

$$\begin{aligned} I_\lambda^+(v) &\geq \frac{1}{2}\|v^+\|^2 + \frac{1}{2}\|v^-\|^2 - \frac{1}{2^*}C_2\|v^+\|^{2^*} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}C_2\|v^+\|^{2^*-2}\right)\|v^+\|^2 + \frac{1}{2}\|v^-\|^2 \geq \alpha > 0. \end{aligned}$$

□

Es lässt sich das folgende zu Lemma 1.11 analoge Lemma beweisen:

Lemma 2.38 Sei $\lambda < 0$ und $\{v_j\} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ eine Palais-Smale-Folge für I_λ^+ mit $I_\lambda^+(v_j) \rightarrow C$. Falls

$$C < \tilde{\beta} = \frac{1}{n}S_2^{n/2}$$

gilt, existiert eine konvergente Teilfolge in $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Beweis: Sei v_j eine Palais-Smale-Folge mit $I_\lambda^+(v_j) \rightarrow C$ für $j \rightarrow \infty$. Analog zu Lemma 1.4 folgt, dass $\{v_j\}$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$ beschränkt ist. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} C &= \lim_j I_\lambda^+(v_j) = \lim_j \left(I_\lambda^+(v_j) - \frac{1}{2}\langle DI_\lambda^+(v_j), v_j \rangle \right) \\ &= \left(\frac{-\lambda}{q} + \frac{\lambda}{2} \right) \int_\Omega \rho^n(v_j)_+^q dx + \frac{1}{n} \int_\Omega \rho^n(v_j)_+^{2^*} dx \\ &\geq \frac{1}{n} \int_\Omega \rho^n(v)_+^{2^*} dx + \frac{1}{n} S_2^{n/2} \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Es folgt die Behauptung analog zu Lemma 1.4.

□

Das folgende Lemma ist eine Ergänzung zu Lemma 2.15:

Lemma 2.39 *Es gilt mit $\kappa = n - q \frac{n-2}{2}$*

$$\begin{aligned}
 1. \int_{\Omega} \rho^{\kappa} |\psi_{\varepsilon}|^q dx &\geq \begin{cases} C_1 \varepsilon^{\frac{n}{2}} |\log(\varepsilon)| + O(\varepsilon^{n/2}) & \text{für } q = \frac{n}{n-2}, n > 4 \\ C_2 \varepsilon^{n-q \frac{n-2}{2}} + O(\varepsilon^{q \frac{n-2}{2}}) & \text{für } q \neq \frac{n}{n-2}. \end{cases} \\
 2. \int_{\Omega} \rho^{\kappa} |\psi_{\varepsilon}|^q dx &\leq \begin{cases} C_1 \varepsilon^{\frac{n}{2}} |\log(\varepsilon)| + O(\varepsilon^{n/2}) & \text{für } q = \frac{n}{n-2}, n > 4 \\ C_2 \varepsilon^{n-q \frac{n-2}{2}} + O(\varepsilon^{q \frac{n-2}{2}}) & \text{für } q > \frac{n}{n-2}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Beweis: Für die erste Abschätzung erhalten wir wie im Beweis des Lemma 2.15

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \rho^{\kappa} |\psi_{\varepsilon}|^q dx &= \int_{\Omega} \rho^{\kappa} (\phi^q - 1) u_{\varepsilon}^q dx + \int_{\Omega} \rho^{\kappa} u_{\varepsilon}^q dx \\
 &= \int_{\Omega \setminus B_{\rho/2}(0)} \rho^{\kappa} (\phi^q - 1) \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{q(n-2)}{4}}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{q(n-2)}{2}}} dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} \rho^{\kappa} \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{q(n-2)}{4}}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{q(n-2)}{2}}} dx \\
 &= C \varepsilon^{\frac{n-2}{2}q} + \int_{\Omega} \rho^{\kappa} \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{q(n-2)}{4}}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{q(n-2)}{2}}} dx.
 \end{aligned}$$

Es bleibt der letzte Term abzuschätzen. Sei $R > 0$ so, dass $B_R(0) \subset \Omega$ gilt.

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \rho^{\kappa} \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{q(n-2)}{4}}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{q(n-2)}{2}}} dx &\geq \int_{B_R(0)} \rho^{\kappa} \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{q(n-2)}{4}}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{q(n-2)}{2}}} dx \\
 &= |\mathbb{S}^n| \int_0^R \rho^{\kappa} \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{q(n-2)}{4}}}{(\varepsilon^2 + |r|^2)^{\frac{q(n-2)}{2}}} r^{n-1} dr \\
 &= |\mathbb{S}^n| \left[\int_0^{\varepsilon} \dots dr + \int_{\varepsilon}^R \dots dr \right].
 \end{aligned}$$

Für den ersten Summanden erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\varepsilon} \rho^{\kappa} \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{q(n-2)}{4}}}{(\varepsilon^2 + |r|^2)^{\frac{q(n-2)}{2}}} r^{n-1} dr &\geq \rho(\varepsilon)^{\kappa} \int_0^{\varepsilon} \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{q(n-2)}{4}}}{(2\varepsilon^2)^{\frac{q(n-2)}{2}}} r^{n-1} dr \\
 &= C \varepsilon^{q \frac{n-2}{2} - q(n-2) + n} = C \varepsilon^{n \frac{2-q}{2} + q}
 \end{aligned}$$

und für den zweiten

$$\begin{aligned}
 \int_{\varepsilon}^R \rho^{\kappa} \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{q(n-2)}{4}}}{(\varepsilon^2 + |r|^2)^{\frac{q(n-2)}{2}}} r^{n-1} dr &\geq \rho(R)^{\kappa} \int_{\varepsilon}^R \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{q(n-2)}{4}}}{(2r^2)^{\frac{q(n-2)}{2}}} r^{n-1} dr \\
 &= C \varepsilon^{\frac{q(n-2)}{2}} \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{r^{n(q-1)-2q+1}} dr \\
 &= \begin{cases} C_1 \varepsilon^{n-q \frac{n-2}{2}} + C_2 \varepsilon^{\frac{q(n-2)}{2}} & \text{für } q \neq \frac{n}{n-2} \\ C_1 \varepsilon^{n/2} |\log(\varepsilon)| + C_2 \varepsilon^{n/2} & \text{für } q = \frac{n}{n-2} \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Aus den verschiedenen Termen folgt die erste Behauptung. Für die zweite Ungleichung wählen wir $R > 0$ so, dass $\Omega \subset B_R(0)$ gilt. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \rho^{\kappa} \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{q(n-2)}{4}}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{q(n-2)}{2}}} dx &\leq \int_{B_R(0)} \rho^{\kappa} \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{q(n-2)}{4}}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{q(n-2)}{2}}} dx \\
 &= |\mathbb{S}^n| \int_0^R \rho^{\kappa} \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{q(n-2)}{4}}}{(\varepsilon^2 + |r|^2)^{\frac{q(n-2)}{2}}} r^{n-1} dr \\
 &= C \varepsilon^{n-q\frac{n-2}{2}} \int_0^{T(\varepsilon)} \frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{q\frac{n-2}{2}}} dt \\
 &\leq C \varepsilon^{n-q\frac{n-2}{2}} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{q\frac{n-2}{2}}} dt}_{=:C_1}.
 \end{aligned}$$

Die Konstante C_1 ist beschränkt, falls $q > \frac{n}{n-2}$. □

Satz 2.40 Sei $n > 4$. Für $\lambda < 0$ mit $|\lambda|$ genügend klein und $\frac{n}{n-2} < q < 2$ existiert eine Lösung von (2.36).

Beweis: Die Bedingung $C < \tilde{\beta}$ für I_{λ}^+ zu verifizieren, ist schwierig. Wir verwenden daher das Lemma 1.15 und zeigen, dass ein $v \in W_0^{1,2}$ existiert so, dass

$$Q_{\mu}(v) = \frac{\int_{\Omega} (\rho^{n-2} |\nabla v|^2 + |\mu| \rho^n |v|^q) dx}{\left(\int_{\Omega} \rho^n |v|^{2^*}\right)^{2/2^*}} < S_2$$

gilt. Sei $v = \rho^{-\frac{n-2}{2}} \psi_{\varepsilon}$. Mit den Lemmas 2.15 und 2.39 erhalten wir für $q > \frac{n}{n-2}$ und $n > 4$

$$\begin{aligned}
 Q_{\mu}(\rho^{-\frac{n-2}{2}} \psi_{\varepsilon}) &\leq \frac{S_2^{n/2} - C_1 \varepsilon^2 + |\mu| C_2 \varepsilon^{n-q\frac{n-2}{2}} + O(\varepsilon^{n-2})}{(S_2^{n/2} + O(\varepsilon^{n-2}))^{2/2^*}} \\
 &\leq S_2 - C_1 \varepsilon^2 + |\mu| C_2 \varepsilon^{n-q\frac{n-2}{2}} + O(\varepsilon^{n-2}).
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Unter der Voraussetzung $q < 2$ und $|\mu|$ klein folgt $Q_{\mu}^+(\rho^{-\frac{n-2}{2}} \psi_{\varepsilon}) < S_2$ für ein $\varepsilon > 0$ genügend klein. Mit dem Lemma 1.15 erhalten wir einen Minimierer $v_1 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ für Q_{μ} . Mit der Transformation $u_1 = K^{\frac{n-2}{4}} v_1$ und $\lambda = \mu \frac{q}{2} K^{\frac{(n-2)(2-q)}{4}}$ erhalten wir einen kritischen Punkt für I_{λ}^+ , wobei K gegeben ist durch

$$K = \frac{\int_{\Omega} (\rho^{n-2} |\nabla v_1|^2 + |\mu| \rho^n |v_1|^q) dx}{\int_{\Omega} \rho^n |v_1|^{2^*} dx} > 0.$$

□

Situation im hyperbolischen Raum

In diesem Abschnitt betrachten wir kurz die analoge Situation für das Brezis-Nirenberg-Problem im hyperbolischen Raum \mathbb{H}^n (für den linearen Fall $q = 2$ siehe Stapelkamp [40]). Wir betrachten daher das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta_{\mathbb{H}^n} u - \lambda u^{q-1} &= u^{2^*-1} \quad \text{in } \Omega' \subset \mathbb{H}^n \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega' \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega' \end{aligned} \quad (2.45)$$

mit $1 < q < 2$. Durch stereographische Projektion in den \mathbb{R}^n erhalten wir das äquivalente Problem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\rho^{n-2}\nabla u) - \lambda \rho^n u^{q-1} &= \rho^n u^{2^*-1} \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.46)$$

mit $\rho(x) = \frac{2}{1 - |x|^2}$.

Für $\lambda = 0$ existiert in einem sternförmigen Gebiet keine Lösung (siehe Stapelkamp [40]). Aus dem Satz 1.8 folgt für das Problem (2.46) die Existenz eines Minimierers u_0 für $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Die Situation für eine zweite positive Lösung soll nun genauer betrachtet werden.

Analog zum sphärischen Fall suchen wir eine Lösung u_1 von (2.46) in der Form $u_1 = u_0 + v$. Wir erhalten für v die Gleichung

$$-\operatorname{div}(\rho^{n-2}\nabla v) = \rho^n (\lambda((u_0 + v)^{q-1} - u_0^{q-1}) + (u_0 + v)^{2^*-1} - u_0^{2^*-1}).$$

Das zugehörige Funktional bezeichnen wir wiederum mit E . Es gilt das zu Lemma 2.33 analoge Lemma

Lemma 2.41 Für $0 < \lambda^* < \lambda \leq \lambda_0$ gilt

$$c_\varepsilon \leq \sup_{t \geq 0} E(t \rho^{-\frac{n-2}{2}} \psi_\varepsilon) < \frac{1}{n} S^{n/2}$$

für $\varepsilon > 0$ genügend klein, wobei c_ε analog zu (2.37) definiert sei.

Beweis: Analog zu Lemma 2.33 schätzen wir das Funktional $E(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \int_\Omega G(x, v) dx$ ab, wobei

$$g(x, s) = \begin{cases} \lambda((u_0 + v)^{q-1} - u_0^{q-1}) + (u_0 + v)^{2^*-1} - u_0^{2^*-1} & \text{für } s \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und $G(x, s) = \int_0^s g(x, s) ds$ die Stammfunktion von g ist. G ist gegeben durch

$$G(x, v) = \begin{cases} \frac{\lambda}{q} ((u_0 + v)^q - u_0^q) + \frac{1}{2^*} ((u_0 + v)^{2^*} - u_0^{2^*}) \\ -\lambda u_0^{q-1} v - u_0^{2^*-1} v & \text{für } v \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Fall $n \geq 4$. Mit der Ungleichung (2.38) folgt

$$g(x, s) \geq s^{2^*-1} + \alpha u_0^{2^*-1} s \quad \text{für } s > 0.$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned} E(t \rho^{-\frac{n-2}{2}} \psi_\varepsilon) &\leq \frac{1}{2} t^2 \int_{\Omega} |\nabla \psi_\varepsilon|^2 dx - \frac{t^{2^*}}{2^*} \int_{\Omega} \psi_\varepsilon^{2^*} dx \\ &\quad - \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} \left(\alpha u_0^{\frac{4}{n-2}} - \frac{1}{2} \frac{n(n-2)}{4} \rho^2 \right) \psi_\varepsilon^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2} t^2 \int_{\Omega} |\nabla \psi_\varepsilon|^2 dx - \frac{t^{2^*}}{2^*} \int_{\Omega} \psi_\varepsilon^{2^*} dx - \frac{t^2}{2} C_1 \int_{\Omega} \psi_\varepsilon^2 dx, \end{aligned}$$

wobei

$$C_1 = \max_{x \in \Omega} \left(\alpha u_0^{\frac{4}{n-2}} - \frac{1}{2} \frac{n(n-2)}{4} \rho^2 \right) > 0.$$

Da $u_0(x)$ und $\rho(x)$ in $r = |x|$ monoton fallend sind, das Maximum bei $x = 0$ angenommen wird und $|u_0|_\infty \rightarrow 0$ für $\lambda \rightarrow 0$ gilt, folgt für $0 < \lambda^* < \lambda < \lambda_0$ die Behauptung wie in Lemma 2.33.

2. Fall $n = 3$. In dem Fall müssen wir wiederum den linearen Term mitberücksichtigen. Der Beweis folgt analog zum entsprechenden Lemma für das Problem auf der Sphäre.

□

Aus dem Mountainpass-Lemma erhalten wir somit eine zweite positive Lösung für $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_0)$. Es gilt der Satz:

Satz 2.42 *Sei $n \geq 3$, dann existiert ein $\lambda^* > 0$ so, dass das Problem (2.46) für $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_0)$ eine zweite Lösung $u_1 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ hat.*

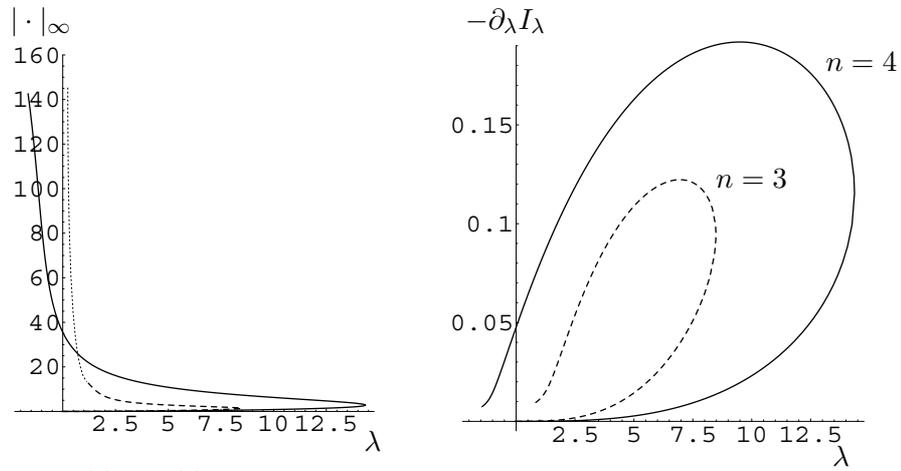
Die Abbildung 2.6 zeigt numerisch berechnete Lösungspfade für Kugeln $B_R(0)$ im euklidischen, sphärischen und hyperbolischen Raum.

2.6.2 $p \neq 2$

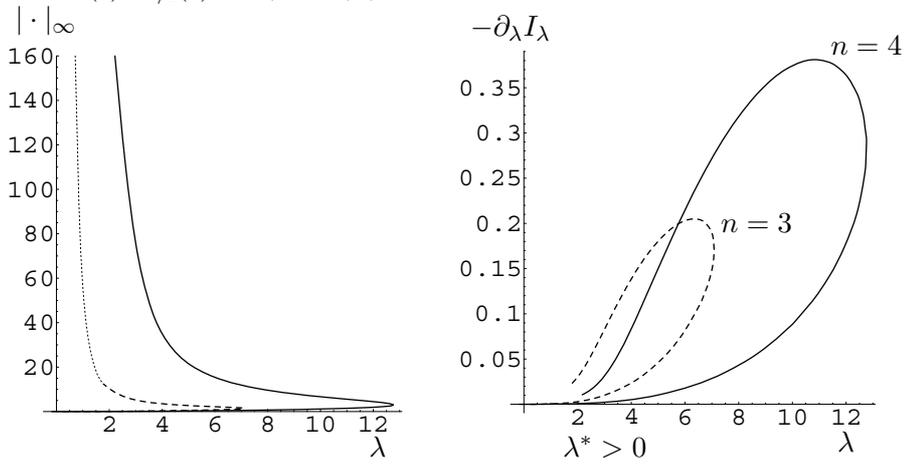
Im Folgenden betrachten wir wiederum das analoge p -Laplace Problem. Nach stereographischer Transformation erhalten wir das Problem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\rho^{n-p} |\nabla u|^{p-2} \nabla u) - \lambda \rho^n u^{q-1} &= \rho^n u^{2^*-1} \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.47}$$

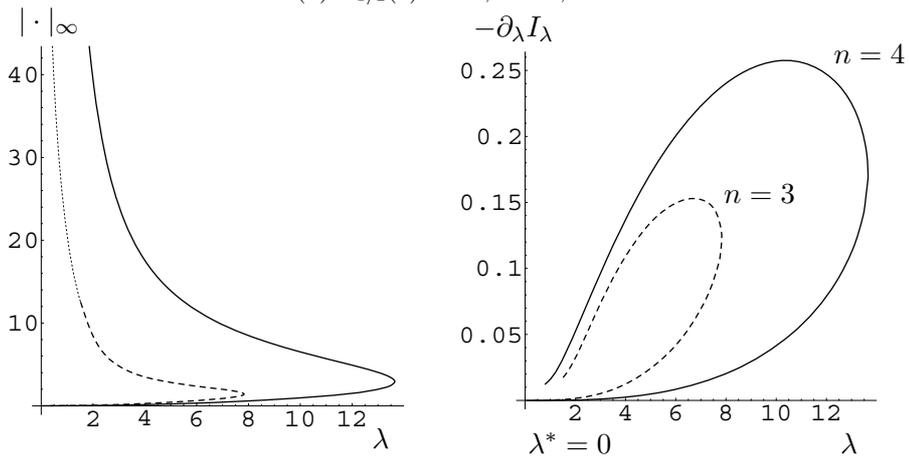
wobei $1 < q < p$ und $n \geq 3$ sei. Aus dem Satz 1.8 folgt die Existenz eines Minimierers u_0 mit $I_\lambda(u_0) < 0$ für $0 < \lambda < \lambda_0$. Es gilt der Satz:



(a) $B_{1/2}(0) \subset \mathbb{S}^n$, $n = 3, 4$; für $n = 3$: $\lambda^* = 0$ und $n = 4$: $\lambda^* < 0$



(b) $B_{1/2}(0) \subset \mathbb{H}^n$, $n = 3, 4$



(c) $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n = 3, 4$

Abbildung 2.6: Vergleich zwischen dem euklidischen, sphärischen und hyperbolischen Raum für das Problem $-\Delta_{\mathcal{M}} u - \lambda \sqrt{u} = u^{\frac{n+2}{n-2}}$ in $B_R(0) \subset \mathcal{M} \in \{\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n, \mathbb{S}^n\}$.

Satz 2.43 *Es existiert ein $\lambda_0 > 0$ so, dass für das Problem (2.47) für alle $\lambda \in (0, \lambda_0)$ ein Minimierer u_0 existiert, wobei*

$$I_\lambda(u_0) = \frac{1}{p} \int_\Omega \rho^{n-p} |\nabla u_0|^p dx - \frac{\lambda}{q} \int_\Omega \rho^n u_0^q dx - \frac{1}{p^*} \int_\Omega \rho^n u_0^{p^*} dx < 0$$

gilt.

Aus dem Satz 2.7 und dem Korollar 2.36 folgen die beiden Aussagen:

Korollar 2.44 *Sei $\Omega = B_R(0)$.*

1. *Für $p > \frac{n+2}{3}$ und $\lambda < 0$ existiert ein $R_0(n, p, q)$ so, dass für alle Kugeln $B_R(0)$ mit $0 < R < R_0(n, p, q)$ keine rotationssymmetrische Lösung für das Problem (2.47) existiert.*
2. *Falls für $p > \frac{n+2}{3}$ eine zweite rotationssymmetrische Lösung u_1 von (2.47) mit $\lambda > 0$ existiert, dann folgt $|u_1|_\infty \rightarrow \infty$ für $\lambda \searrow \lambda^* > 0$ für alle Kugeln $B_R(0)$ mit $R < R_0(n, p)$.*

Bemerkung 2.45 Aus den numerischen Berechnungen (siehe Abbildung 2.7) kann man sehen, dass auch für $p > \frac{n+2}{3}$ eine zweite Lösung für gewisse λ existiert. Deren Existenz zu beweisen ist jedoch schwierig, da für den p -Laplace-Beltrami-Operator das Lemma A.1 nicht richtig ist. Für $p < \frac{n+2}{3}$ folgt ebenfalls die Existenz für $\lambda < 0$ mit $|\lambda|$ klein. Es gilt $S_{p,p^*}(\rho^{n-p}, \rho^n, \Omega) < S$ und entsprechend erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 < Q_\mu(u) &= \frac{\int_\Omega \rho^{n-p} |\nabla u|^p dx + |\mu| \int_\Omega \rho^n (u^+)^q dx}{\left(\int_\Omega \rho^n |u|^{p^*} dx\right)^{p/p^*}} \\ &\leq S_{p,p^*}(\rho^{n-p}, \rho^n, \Omega) + |\mu| \frac{\int_\Omega \rho^n |u|^q dx}{\left(\int_\Omega \rho^n |u|^{p^*} dx\right)^{p/p^*}}. \end{aligned}$$

—

2.7 Der sublineare Fall

In diesem Kapitel betrachten wir den in null sublinearen Fall. Die beiden Fälle $p = 2$ und $p \neq 2$ unterscheiden wir im Folgenden nicht. Wir betrachten das Problem (2.2):

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\rho^{n-p} |\nabla u|^{p-2} \nabla u) - \lambda \rho^n u^{q-1} &= \rho^n u^{2^*-1} \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.48}$$

mit $1 < p < q < p^*$. Als Korollar von Satz 1.7 können wir das folgende Resultat festhalten:

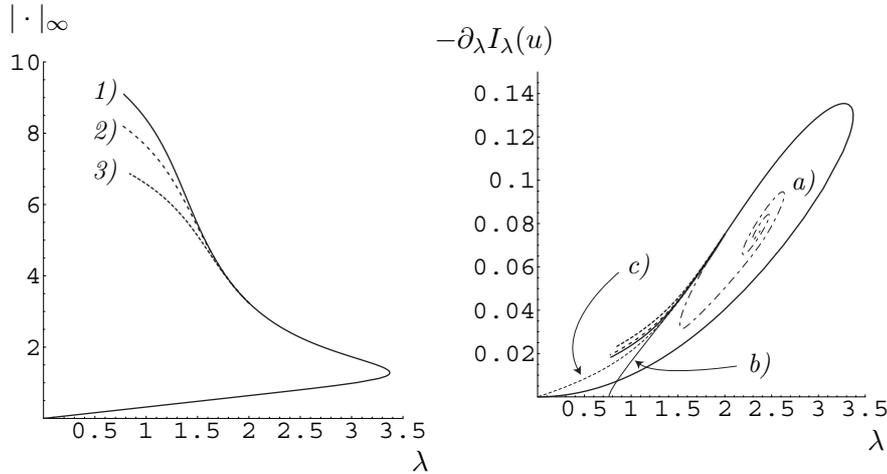


Abbildung 2.7: Numerische Berechnungen für $n = 4, p = 3, q = 2$ und $\Omega = B_1(0)$. In dem Fall gilt $R_0 > 1$, daher existiert keine nichttriviale Lösung für $\lambda = 0$. Mit a)-c) sind verschiedene mögliche Fortsetzungskurven skizziert. Die Lösungskurven 1)-3) wurden in finite Elementräumen $V \subset W_0^{1,3}$ mit $\dim V = 2048, 1024, 512$ berechnet.

Korollar 2.46 *Es existiert ein λ^* so, dass für alle $\lambda > \lambda^*$ das Problem (2.48) für $1 < p < q < p^*$ und $p < n$ eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ hat.*

Im Folgenden wird es nun darum gehen,

$$\lambda^* = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \text{für } \lambda \text{ existiert eine Lösung von (2.48)}\}$$

genauer zu beschreiben. Aus dem Satz 2.3 folgt das Korollar:

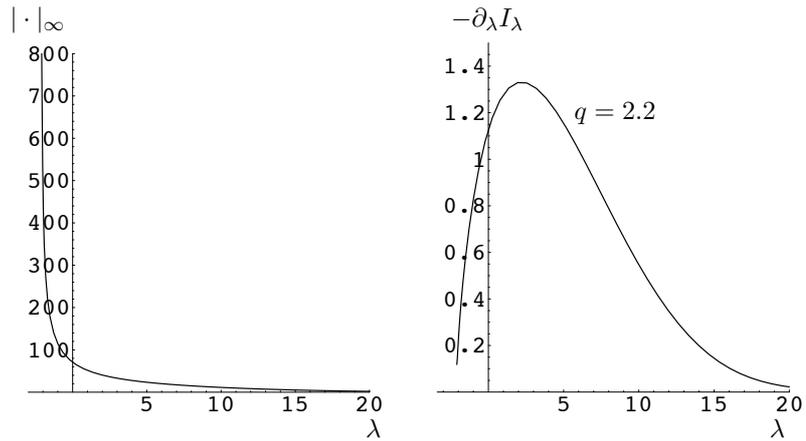
Korollar 2.47 *Für $p < \frac{n+2}{3}$ ist $\lambda^* < 0$.*

Für $\Omega = B_R(0)$ folgt aus Satz 2.3 und Satz 2.7:

Korollar 2.48 *Sei $\Omega = B_R(0)$ und $p > \frac{n+2}{3}$. Dann gilt $\lambda_{rot}^* \geq 0$ für $R < R_0$, wobei R_0 der kritische Radius aus Satz 2.7 bezeichnet.*

In der Abbildung 2.8 sind numerisch berechnete Beispiele zu den beiden Korollaren zu sehen.

a) $p = 2$, Beispiel zu Korollar 2.47



b) $p = 3$, Beispiele zu Korollar 2.48

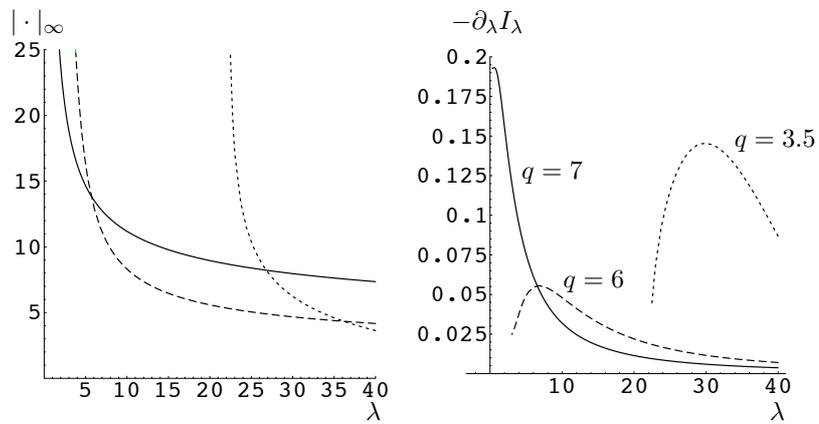


Abbildung 2.8: Numerische Lösungskurven für $R = 0.5, n = 5$. In a) ist $p = 2 < \frac{n+2}{3} = \frac{7}{3}$ und daher $\lambda^* < 0$. In b) ist $p > \frac{n+2}{3}$. Für $q = 7, q = 6$ bzw. $q = 3.5$ gilt $\lambda_{\text{rot}}^* \geq 0$, wobei man erwarten kann, dass in diesen beiden Fällen $\lambda_{\text{rot}}^* > 0$ ist.

Das Verhalten für q gegen p^*

Sei $q = p^*$, dann erhalten wir für (2.48) das Problem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\rho^{n-p}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= (1 + \lambda)\rho^n u^{p^*-1} \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, dass eine nichttriviale Lösung u für $\lambda = 0$ existiert, können wir für alle $\lambda > -1$ eine zugehörige skalierte Lösung $v = \alpha u$ finden. Für $p = q$ wissen wir, dass $|u|_\infty \rightarrow \infty$ für $\lambda \rightarrow \lambda^*$ gilt. Für $p < q < p^*$ kann nun beobachtet werden, dass eine zweite positive Lösung für gewisse λ numerisch berechnet werden kann (siehe Abbildung 2.9). Es stellen sich für dieses Verhalten diverse offene Fragen:

1. Wie lässt sich im sublinearen Fall die zweite - falls existent - positive Lösung charakterisieren?
2. Gibt es mehrfache Lösungen?

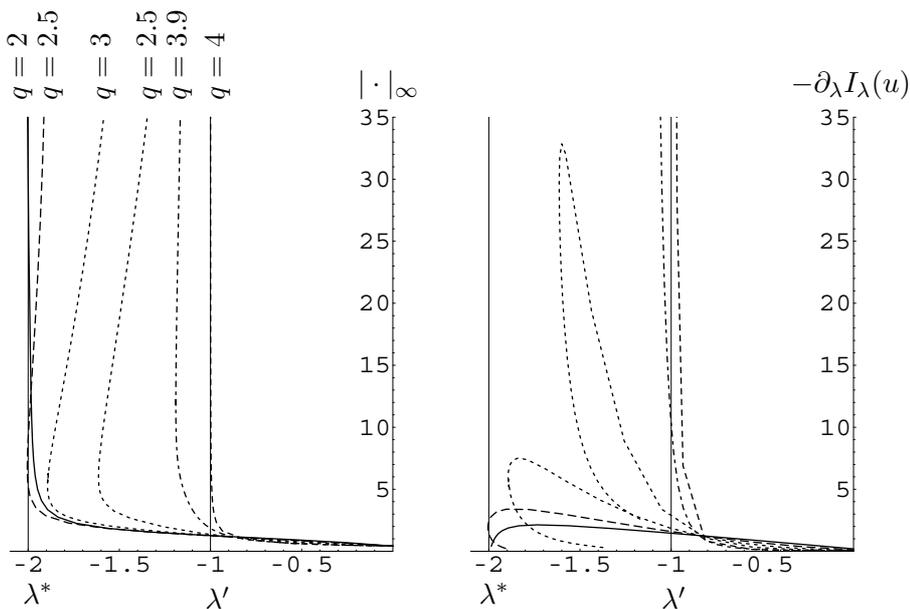


Abbildung 2.9: Verhalten für $2 < q < 2^*$, $n = 4$, $R = 6$. Für $q = 2$ gilt $\lambda^* = -\frac{n(n-2)}{4} = -2$ und für $q = p^*$ gilt $\lambda^* = \lambda' = -1$.

2.8 Der Grenzfall

Wir stören den linearen Fall um ein kleines ε :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\rho^{n-p}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \lambda\rho^n u^{p-1+\varepsilon} &= \rho^n u^{p^*-1} && \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &> 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Die Abbildung 2.10 zeigt die Abhängigkeit der Lösungspfade Γ^ε von ε . Aus den numerischen Berechnungen können wir die folgenden Beobachtungen machen, wobei diese offene Probleme sind. Es stellen sich zudem diverse offene Fragen. Mit $\lambda_1 > 0$ sei der kleinste positive Eigenwert des p -Laplace-Beltrami-Operators $-\Delta_{p,\mathbb{S}^n} u$ mit Dirichlet-Randwert bezeichnet.

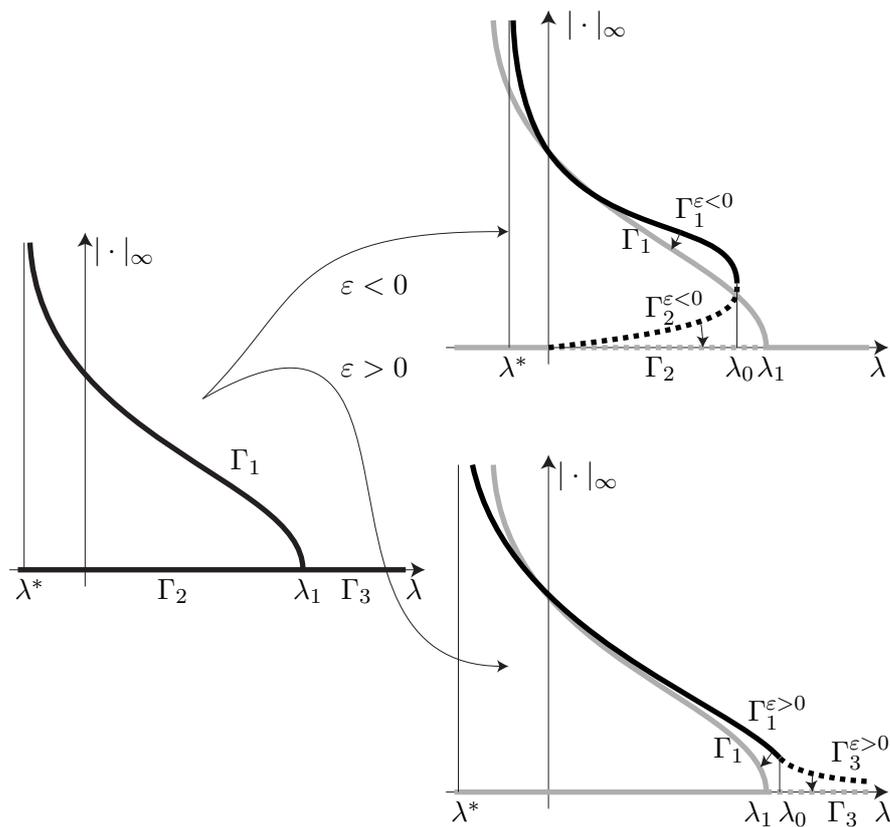


Abbildung 2.10: Verhalten im Grenzfall für ε klein.

1. Im linearen Fall, $\varepsilon = 0$: Für $p = 2$ gilt $\lambda^* = -\frac{n(n-2)}{4}$. Wie lässt sich λ^* für $p \neq 2$ näher charakterisieren?
2. Im superlinearen Fall, $\varepsilon < 0$:
 - (a) Die Lösungen $u_0 \in \Gamma_2^{\varepsilon < 0}$ mit negativer Energie $I_\lambda(u_0) < 0$ gehen für $\varepsilon \rightarrow 0$ in die Nulllösungen über.
 - (b) Die Lösungen $u_1 \in \Gamma_1^{\varepsilon < 0}$ bleiben im Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten und gehen in die nichttrivialen Lösungen des linearen Problems über. Insofern sind diese Lösungen die wirklich nichttrivialen.
 - (c) Unklar ist das Verhalten von λ_0 . Gilt $\lambda_0 < \lambda_1$?
 - (d) Dieselbe Frage stellt sich für λ^* . Wie verhält sich λ^* in Abhängigkeit von q im superlinearen Fall?
3. Im sublinearen Fall, $\varepsilon > 0$:
 - (a) Die Lösungen $u_1 \in \Gamma_1^{\varepsilon > 0}$ gehen über in die nichttrivialen Lösungen des linearen Problems und bleiben somit als nichttriviale Lösungen erhalten.
 - (b) Die Lösungen $u_0 \in \Gamma_3^{\varepsilon > 0}$ gehen in die trivialen Lösungen des linearen Problems über.
 - (c) Gibt es in diesem Fall ein sinnvolles λ_0 analog zum superlinearen Fall?
 - (d) Wie verhält sich λ^* in Abhängigkeit von q ?

Die folgenden Abbildungen sind verschiedene numerische Beispiele zu den obigen Beobachtungen. Die Abbildung 2.12 zeigt deren Lage bezüglich dem Nichtexistenzsatz 2.7.

- sublinearer Lösungspfad, $\varepsilon = -0.2 < 0$
- linearer Lösungspfad, $\varepsilon = 0$
- superlinearer Lösungspfad, $\varepsilon = 0.2 > 0$

Abbildung 2.11: Linienmuster für die folgenden Beispiele

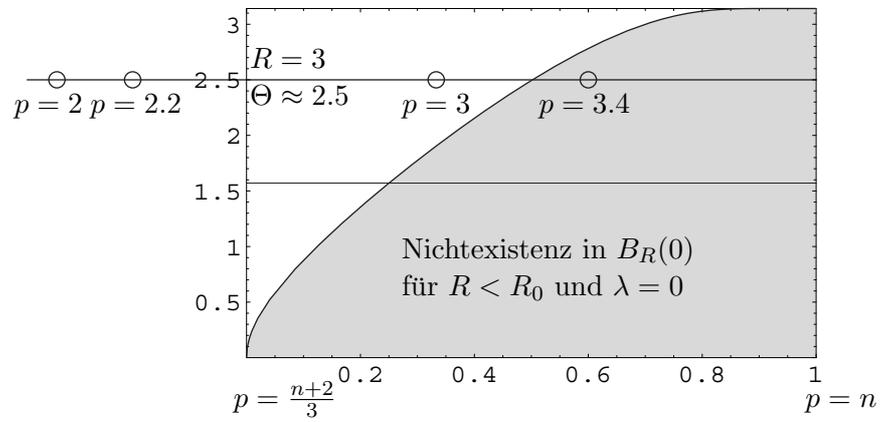


Abbildung 2.12: Lage der Beispiele bezüglich der numerisch berechneten Nichtexistenzschranke $R_0(t)$ für $\lambda = 0$ aus dem Satz 2.7.

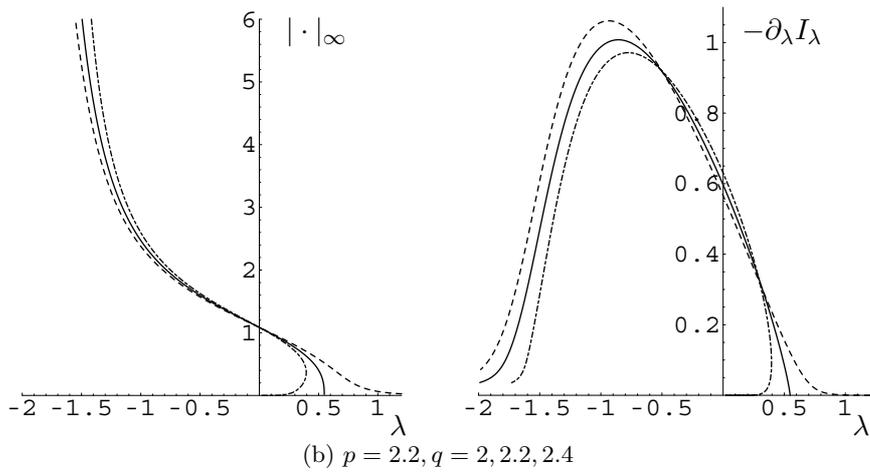
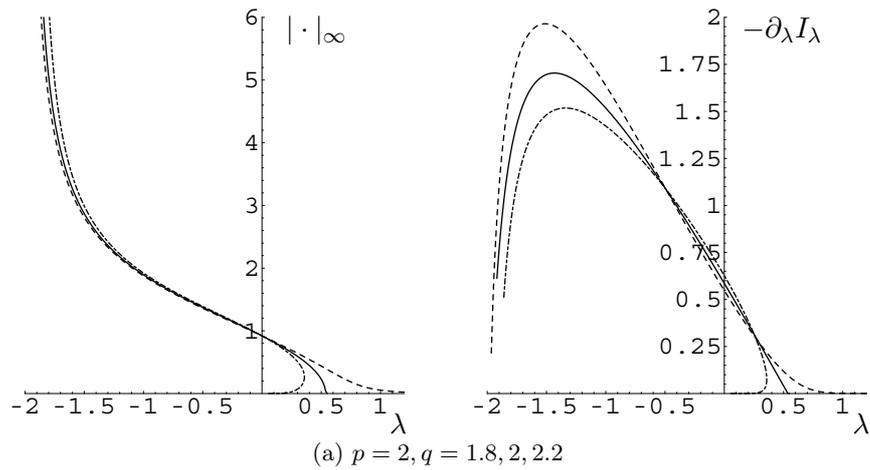


Abbildung 2.13: Beispiele für den Grenzfall mit $R = 3, n = 4$

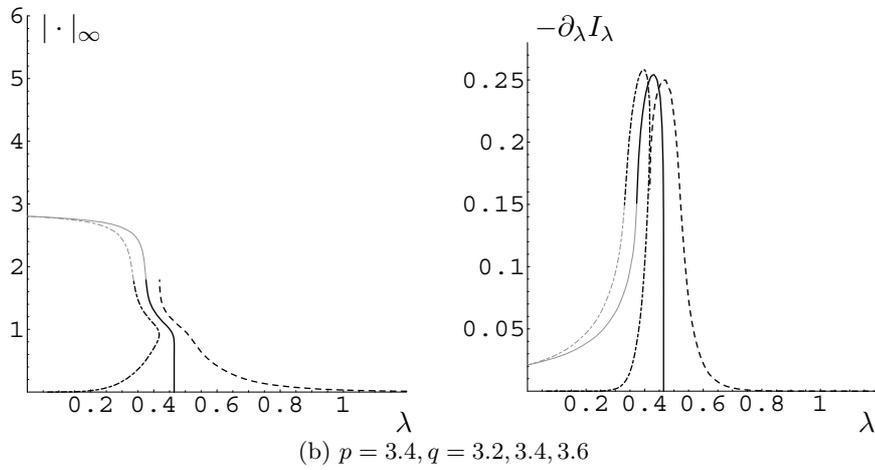
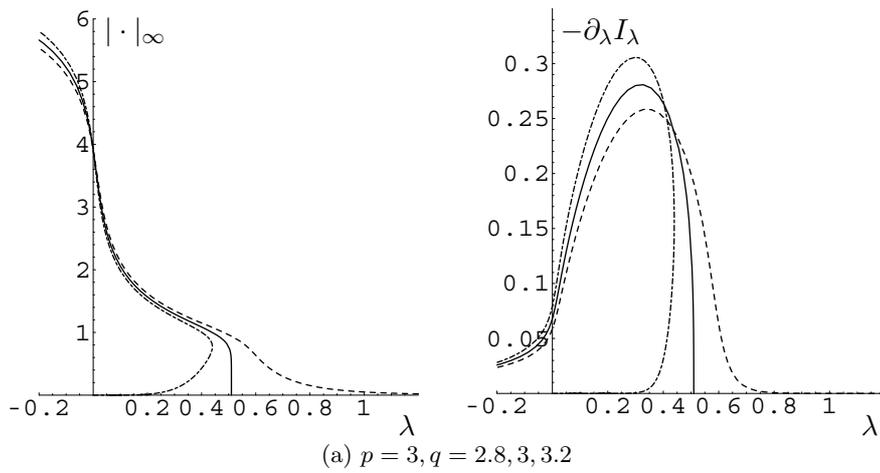


Abbildung 2.14: Beispiele für den Grenzfall mit $R = 3, n = 4$

2.9 Numerische Lösungen in grossen Kugeln

Die Frage bezüglich Existenz und Nichtexistenz von Lösungen für das Problem (2.2) in grossen Gebieten mit $\lambda \ll 0$ ist offen (siehe auch Abbildung 2.4 für den Fall $p = 2$). Bandle und Benguria haben für die Dimension $n = 3$ als erste das Auftreten von positiven numerischen Lösungen in grossen Kugeln beobachtet (siehe [4]). Aus dem Satz 2.18 folgt, dass für den p -Laplace-Beltrami-Operator das Gebiet Ω genügend gross sein muss, damit diese Lösungen beobachtet werden können. Wir verwenden die in Kapitel 3 beschriebenen numerischen Methoden um die Situation zu untersuchen. In den folgenden Abbildungen sind daher Näherungslösungen und Näherungslösungspfade zu sehen, die wir jedoch der Einfachheit halber als Lösungen und Lösungspfade bezeichnen. In der Abbildung 2.15 sind für die Dimension $n = 3, 4, 5$ Lösungspfade in Abhängigkeit von $(\lambda, |\cdot|_\infty)$, $(\lambda, u(0))$ und $(\lambda, -\partial_\lambda I_\lambda)$ zu sehen. Um die Struktur der Lösungen (siehe z.B. Abbildung 2.16) hervorheben zu können, führen wir die folgende Bezeichnung ein: Lösungspfade von Lösungen mit k Maxima bezeichnen wir mit \mathcal{B}_k und solche mit k Minima mit \mathcal{B}_{-k} . Die Lösungskurven der Minimierer bezeichnen wir mit \mathcal{B}_0 . Die Existenz der \mathcal{B}_0 Lösungen wurde in den vorangegangenen Kapiteln eingehend diskutiert.

Mit u_λ bezeichnen wir eine Lösung von (2.10) für ein festes $\lambda < 0$. Für $\lambda < 0$ ist die Konstante $|\lambda|^{1/(p^*-q)}$ eine schwache Lösung der Differentialgleichung $-\Delta_{p,\mathbb{S}^n} u - \lambda u^{q-1} = u^{p^*-1}$ auf ganz \mathbb{S}^n ohne Randbedingung. Diese Lösung hat drei interessante Eigenschaften:

1. Betrachtet man die Lösungspfade in Abhängigkeit von $(\lambda, |\cdot|_\infty)$, so gilt für $\lambda < 0$: $|u_\lambda|_\infty \geq |\lambda|^{1/(p^*-q)}$. Der Beweis ist einfach: Sei $x_0 \in \Omega$ so, dass $u_\lambda(x_0) = |u_\lambda|_\infty$ gilt. Dann folgt $0 = \Delta_p u_\lambda(x_0) + \lambda u_\lambda(x_0)^{q-1} + u_\lambda(x_0)^{p^*-1} \leq +\lambda u_\lambda(x_0)^{q-1} + u_\lambda(x_0)^{p^*-1}$. Daraus erhalten wir $u_\lambda(x_0) \geq |\lambda|^{1/(p^*-q)}$.
2. Für die Lösungspfade in Abhängigkeit von $u_0 = u(0)$ können wir die folgende Beobachtung machen: Die konstante "Lösung" $|\lambda|^{1/(p^*-q)}$ trennt die Lösungspfade \mathcal{B}_k und \mathcal{B}_{-k} für $k > 0$.
3. Die Parameterwahl $(\lambda, -\partial_\lambda I_\lambda)$ ist für die Darstellung von Lösungspfaden ebenfalls interessant, siehe dazu [36]. In unserem Fall gilt $-\partial_\lambda I_\lambda(u) = 1/q \int_\Omega \rho^n |u|^q dx$. Für die konstante "Lösung" erhalten wir

$$-\partial_\lambda I_\lambda(|\lambda|^{1/(p^*-q)}) = \frac{1}{q} |\lambda|^{1/(p^*-q)} \int_{\mathbb{S}^n} \rho^n dx.$$

Aus dieser Beobachtung und den numerischen Berechnungen können wir die folgende Vermutung formulieren:

Vermutung 2.49 Sei u_λ eine Lösung von (2.2) mit $q = p$, dann existiert eine Konstante $0 < C(\Omega) \leq \frac{1}{p} \int_{\mathbb{S}^n} \rho^n dx$ so, dass

$$\frac{1}{p} \int_{\Omega} \rho^n u_\lambda^p dx \leq C(\Omega) |\lambda_1 - \lambda|^{\frac{p}{p^* - p}}.$$

Für den Fall $q \neq p$ ist das Wachstum von $-\partial_\lambda I_\lambda$ beschränkt durch eine Kurve mit Wachstum in der Potenz $|\lambda|^{\frac{q}{p^* - q}}$.

Das Auftreten der Lösungen \mathcal{B}_k mit $k > 0$ ist nicht von der Nichtlinearität $u^{p^* - 1}$ abhängig. In der Abbildung 2.19 sind Beispiele für eine subkritische, kritische und superkritische Nichtlinearität u^s der Differentialgleichung $-\Delta_{p, \mathbb{S}^n} u - \lambda u^{q-1} = u^{s-1}$ zu sehen. Im subkritischen Fall (Abbildung 2.19(a)) mit $s = 5 < 2^*$ existiert zudem für alle $\lambda < \lambda_1$ ein positiver Minimierer \mathcal{B}_0 . Die letzte Abbildung 2.19(c) zeigt den superkritischen Fall mit $s = 7$. Die Lösungen \mathcal{B}_1 bleiben erhalten. Hingegen können für das Beispiel numerisch keine Lösungen \mathcal{B}_{-k} gefunden werden. Für das Verhalten der Lösungen \mathcal{B}_0 sind in der Abbildung 2.21 noch weitere Beispiele in den Dimensionen $n = 3, 4$ und 5 für den superkritischen Fall zu sehen.

Betrachtet man die Lösungspfade in Abhängigkeit von $(\lambda, -\partial_\lambda I_\lambda)$ im kritischen Fall, so zweigen die Lösungspfade \mathcal{B}_{-k} aus den Lösungspfaden \mathcal{B}_k (siehe Abbildung 2.15, numerierte Punkte). Im subkritischen Fall existieren die Lösungspfade \mathcal{B}_{-k} für alle $\lambda < 0$, wohingegen im superkritischen Fall in den zu sehenden Beispielen keine Lösungen gefunden werden können. Es besteht die folgende Vermutung:

Vermutung 2.50 Wir betrachten die Lösungspfade in Abhängigkeit von $(\lambda, -\partial_\lambda I_\lambda)$. Dann gilt:

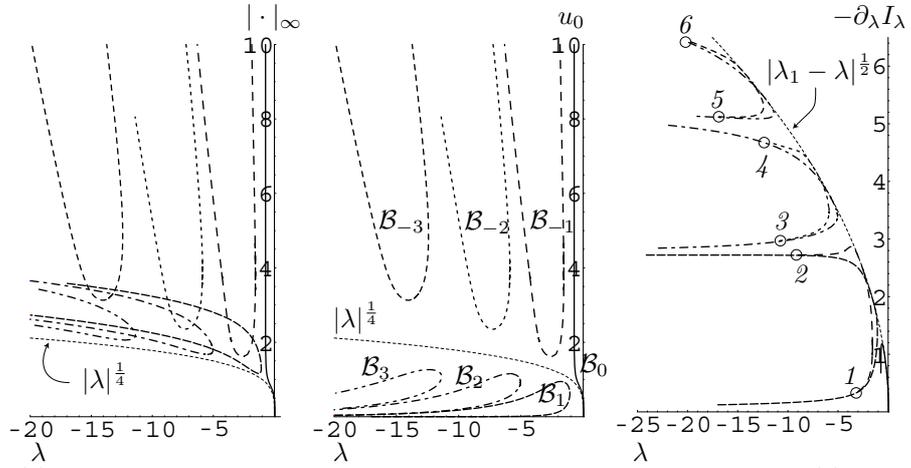
1. Im subkritischen Fall haben wir eine Verzweigung der Lösungspfade \mathcal{B}_{-k} aus den Lösungspfaden \mathcal{B}_k im Unendlichen.
2. Im kritischen Fall verzweigen die Lösungspfade \mathcal{B}_{-k} aus \mathcal{B}_k in den Punkten $(\lambda_k^{1,2}, u_{\lambda_k^{1,2}})$ mit $\lambda_k^{1,2} > -\infty$, wobei die Lösungen $u_{\lambda_k^{1,2}} \in \mathcal{B}_{-k}$ gegeben sind durch

$$u_{\lambda_k^{1,2}} = v_{\lambda_k^{1,2}} + \nu_k \delta(0)$$

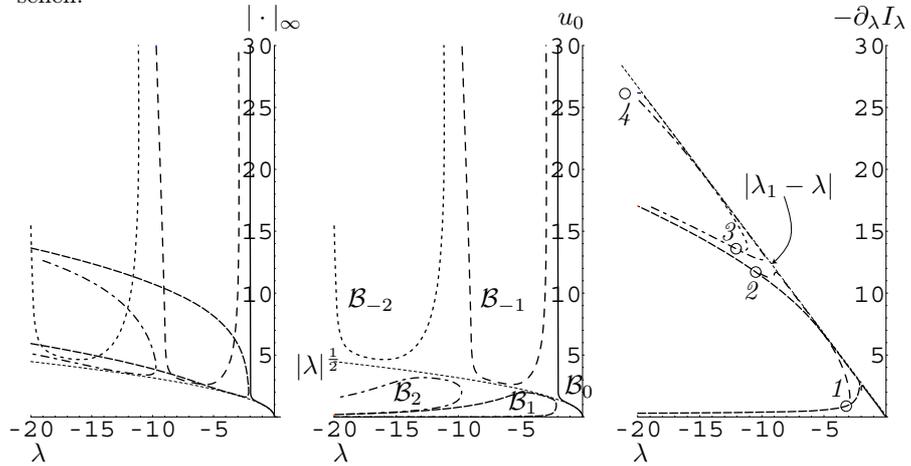
mit $v_{\lambda_k^{1,2}} \in \mathcal{B}_k$, δ ein Diracmass und $\nu_k > 0$.

In der Abbildung 2.18 sind Beispiele zum zweiten Punkt der Vermutung zu sehen. Die Numerierung der Lösungen entspricht der Numerierung der Punkte in den Lösungspfaden der Abbildungen 2.15(a) und 2.15(b).

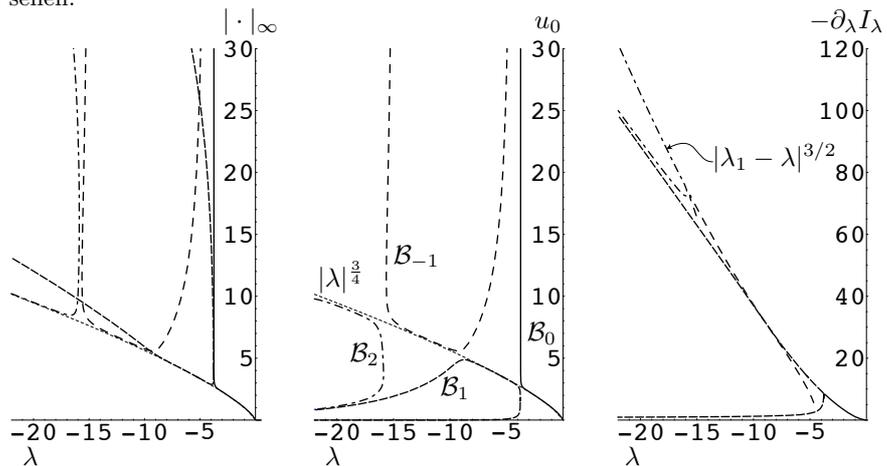
Für den superlinearen Fall sowie den sublinearen Fall können ebenfalls Lösungen für das Problem (2.2) in grossen Gebieten mit $\lambda \ll 0$ berechnet werden. Die Lösungspfade sind wieder mit $\mathcal{B}_{\pm k}$, $k \in \mathbb{N}$ bezeichnet. In der Abbildung 2.20 ist jeweils ein Beispiel zu sehen. Im sublinearen Fall hängen die numerischen Lösungen der Lösungspfade \mathcal{B}_{-k} sehr stark von q und dem Radius R ab.



(a) $n = 3$, die Lösungen zu den Punkten 1 - 6 sind in der Abbildung 2.18(a) zu sehen.



(b) $n = 4$, die Lösungen zu den Punkten 1 - 4 sind in der Abbildung 2.18(b) zu sehen.



(c) $n = 5$

Abbildung 2.15: Lösungspfade für $R = 25, p = q = 2$.

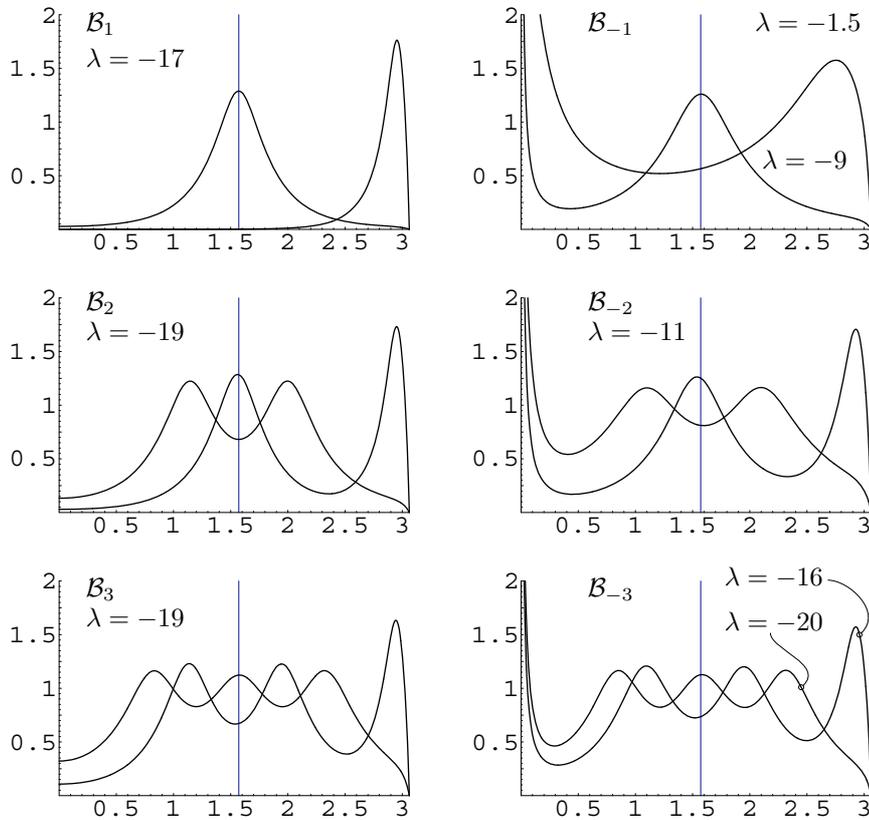


Abbildung 2.16: Lösungen in den θ -Koordinaten für $n = 3, R = 25, p = q = 2$, skaliert mit $|\lambda|^{-1/4}$.

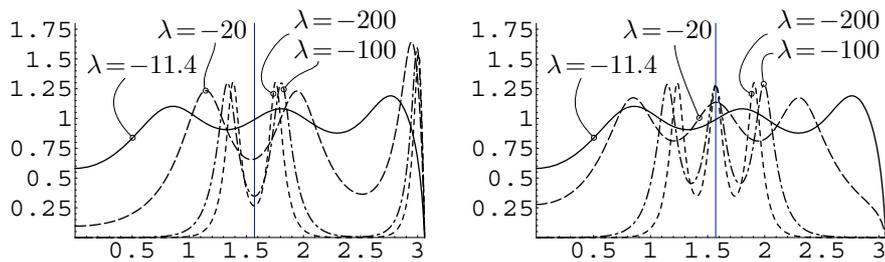


Abbildung 2.17: Die Lösungen $\mathcal{B}_k, k > 0$ treten für ein festes λ paarweise auf (siehe auch Abbildung 2.16 linke Spalte). Das Beispiel zeigt die Abhängigkeit der \mathcal{B}_3 -Lösungen von λ (in den θ -Koordinaten, für $n = 3, R = 25, p = q = 2$, skaliert mit $|\lambda|^{-1/4}$). $\lambda \approx -11.4$ ist das maximale λ auf \mathcal{B}_3 (vgl. Abbildung 2.18(a)).

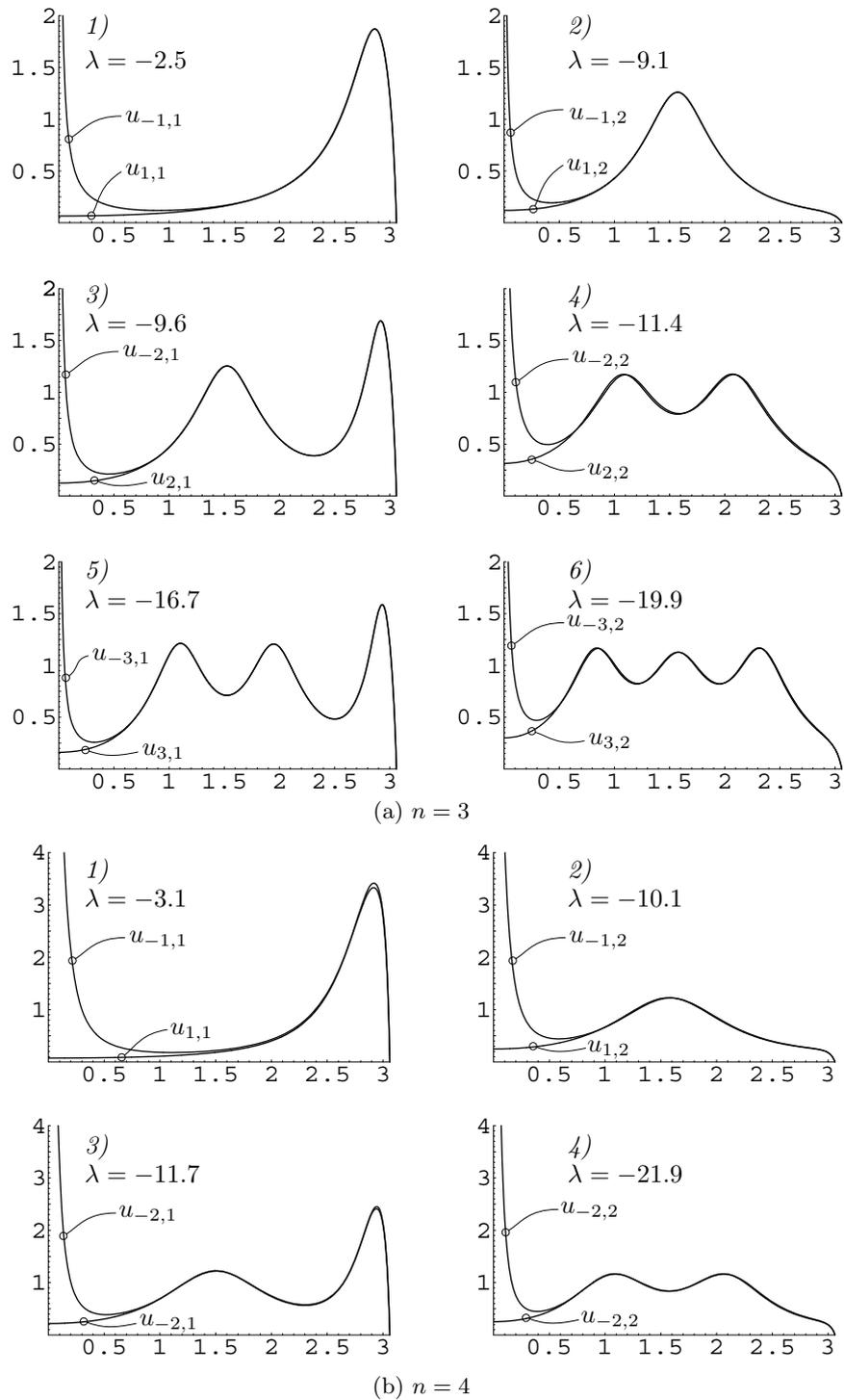


Abbildung 2.18: Lösungen $u_{\pm k, j} \in \mathcal{B}_{\pm k}$ mit $j = 1, 2$ in den θ -Koordinaten für $R = 25, p = q = 2$, skaliert mit $|\lambda|^{-1/(2^*-2)}$.

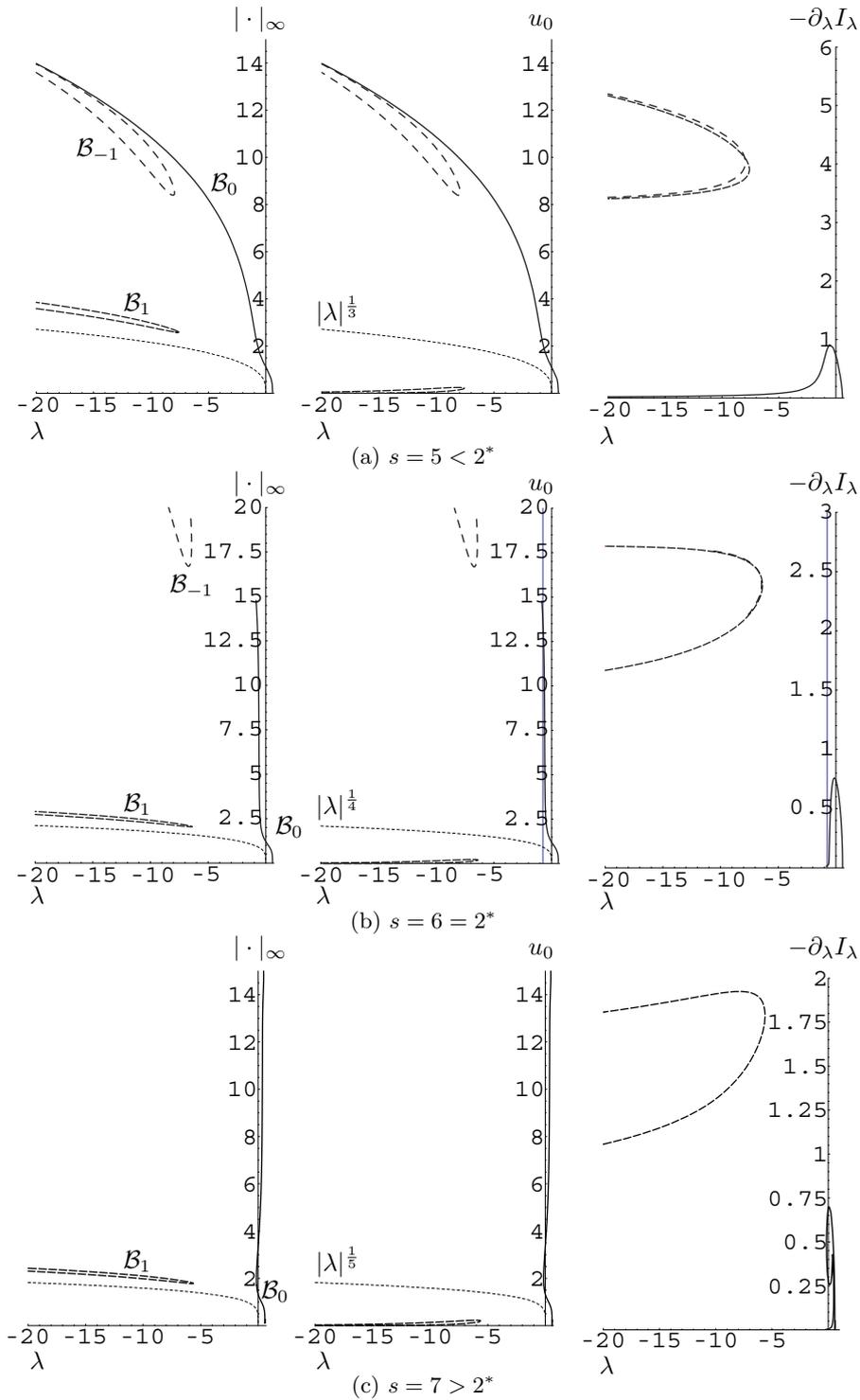


Abbildung 2.19: Lösungspfade für $R = 3, n = 3, p = q = 2$ mit verschiedenen Nichtlinearitäten u^{s-1} .

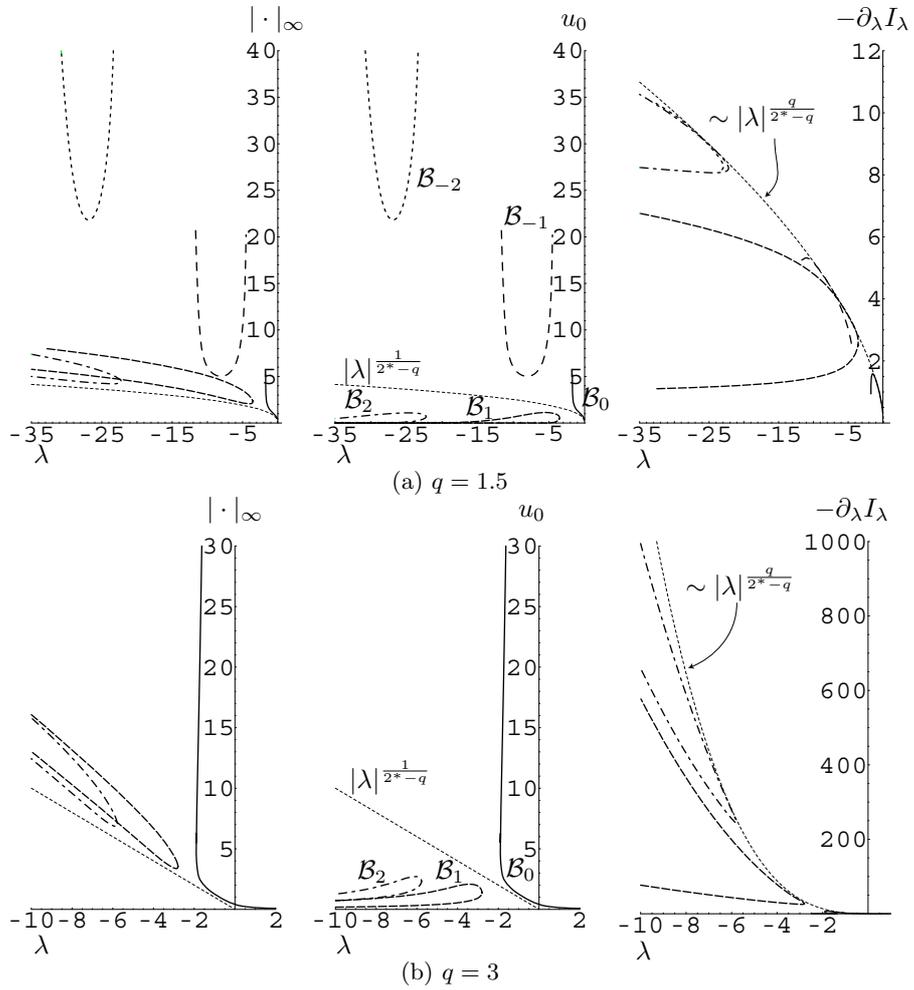


Abbildung 2.20: Lösungspfade für den sub- und superlinearen Fall mit $n = 4, p = 2$ und $R = 6$.

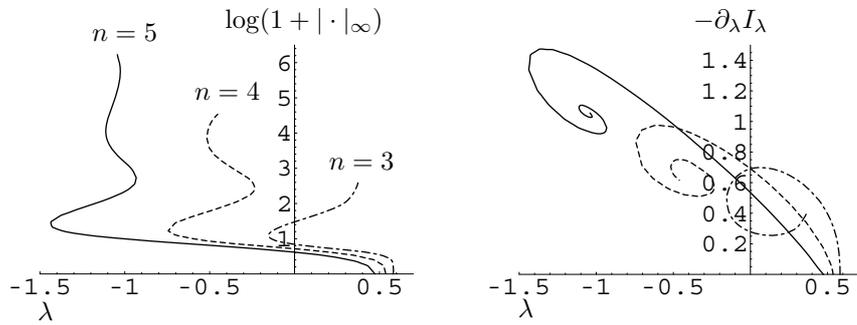
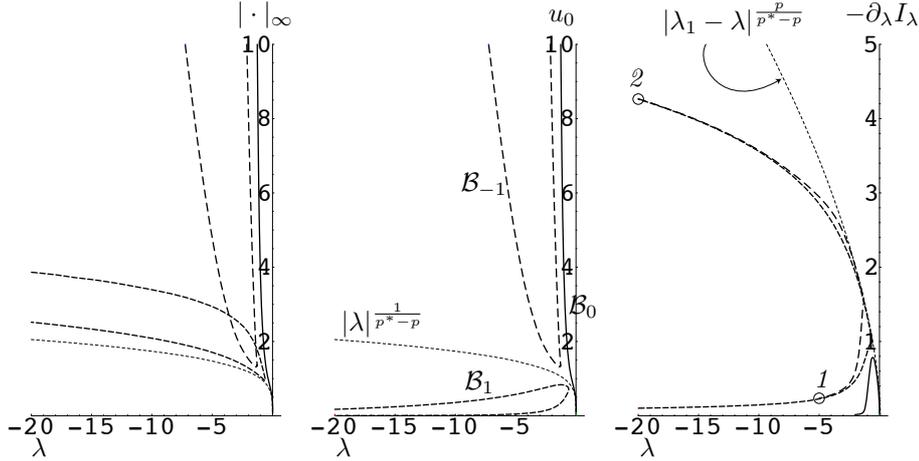
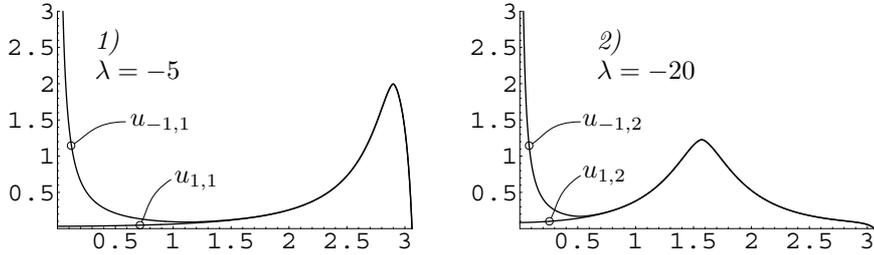


Abbildung 2.21: Lösungspfade für $p = 2, q = 2, s = 2^* + 1$ und $R = 3$.

Für den p -Laplace können ebenfalls Lösungen in grossen Gebieten berechnet werden. Im Folgenden ist ein Beispiel für $n = 4, p = q = 2.5$ und $R = 25$ zu sehen. Aus der Abbildung 2.22(a) geht hervor, dass das Eindeutigkeitsresultat der \mathcal{B}_0 -Lösungen für $p = 2$ in geodätischen Kugeln im Fall $p \neq 2$ nicht erwartet werden kann. Weitere Beispiele für Lösungen mit einem grossen Wert für p sind in der Abbildung 3.2 zu sehen.



(a) Lösungspfade für $n = 4, p = q = 2.5$ und $R = 25$. Die Lösungen in den Punkten 1 & 2 sind unten zu sehen.



(b) Lösungen $u_{\pm 1, j} \in \mathcal{B}_{\pm 1}$ mit $j = 1, 2$ in den θ -Koordinaten, skaliert mit $|\lambda|^{-1/(p^*-p)}$

Abbildung 2.22: Beispiel mit $n = 4, p = q = 2.5$ und $R = 25$.

Bemerkung 2.51 Die Struktur der Lösungen kann im Allgemeinen wie folgt beschrieben werden (vergleiche auch Abbildung 2.18):

$$\begin{aligned}
 u_{1,1} & \rightarrow u_{1,2} \\
 u_{2,1} & \approx u_{1,2} + u_{1,1} \rightarrow u_{2,2} \\
 u_{3,1} & \approx u_{2,2} + u_{1,1} \rightarrow u_{3,2} \\
 & \vdots \\
 u_{k,1} & \approx u_{k-1,2} + u_{1,1} \rightarrow u_{k,2} \\
 u_{k+1,1} & \approx u_{k,2} + u_{1,1} \rightarrow u_{k+1,2} \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

Kapitel 3

Numerische Methoden

3.1 Strategie

Wir suchen numerische Näherungslösungen für das Problem (2.2). Da wir insbesondere an Näherungslösungen für $n \geq 3$ interessiert sind, beschränken wir uns auf rotationssymmetrische Lösungen in einer Kugel $\Omega = B_R(0)$. Gesucht sind daher Näherungslösungen $u(r)$ des Randwertproblems (2.10).

Sei $u(r)$ eine Lösung von (2.10) und $u_0 = u(0)$, dann löst $u(r) = u(r; u_0)$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} -(\rho^{n-p} r^{n-1} |u'(r)|^{p-2} u'(r))' - \lambda \rho^n r^{n-1} |u|^{q-2} u &= \rho^n r^{n-1} |u|^{p^*-2} u \\ &\text{für } r \in (0, R) \end{aligned} \tag{3.1}$$
$$\begin{aligned} u'(0) &= 0 \\ u(0) &= u_0 > 0. \end{aligned}$$

Das Anfangswertproblem hat für jedes $u_0 > 0$ und r klein eine eindeutige Lösung (siehe Bandle et al. [6]). In einem ersten Schritt werden wir numerisch die Abhängigkeit von $R = \min\{r \in \mathbb{R}^+ : u(r; u_0) = 0\}$, sofern eine erste Nullstelle existiert, vom Anfangswert u_0 studieren. Daraus erhalten wir für einen festen Radius R eine Approximation der Anzahl rotationssymmetrischer Näherungslösungen von (2.10). Die zu einem gegebenen R gehörige Approximation von u_0 wird benutzt, um mit einer Schiessmethode das Randwertproblem (2.10) numerisch zu lösen. Im zweiten Schritt sollen die Näherungslösungspfade in Abhängigkeit des Parameters λ berechnet werden. Dies werden wir mit einer finite Elemente Methode und der Newton-Iteration machen. Für die Konvergenz der Newton-Iteration ist eine gute Approximation einer Näherungslösung des Randwertproblems notwendig. Die Lösung aus der Schiessmethode ist dazu geeignet.

3.2 Schiessmethode

Anzahl Lösungen

Da das Anfangswertproblem (3.1) eine eindeutige Lösung für r klein hat, hängt die Funktion

$$R(u_0) = \begin{cases} \min\{r \in \mathbb{R}^+ : u(r; u_0) = 0\}, & \text{falls erste Nullstelle existiert,} \\ +\infty & \text{anderenfalls,} \end{cases}$$

im Fall, dass eine erste Nullstelle existiert, stetig von u_0 ab. Für Details sei auf die Arbeit Bandle et al. [6] verwiesen. Aus dem Bild $\mathcal{R} = \{R(u_0) : u_0 \in [0, \infty)\}$ ist ersichtlich, wie viele rotationssymmetrische Lösungen des Randwertproblems für ein festes R existieren. Praktisch lösen wir das Anfangswertproblem (3.1) mit Hilfe einer Runge-Kutta Methode vierter Ordnung, mit Fehlerschätzer für die Kontrolle der Schrittweite (siehe Schwarz [39], Seite 388). Wir brechen die numerische Berechnung ab, falls $u(r) < 0$ oder r grösser als ein gegebenes r_{max} ist. Ein Beispiel ist in der Abbildung 3.1 zu sehen.

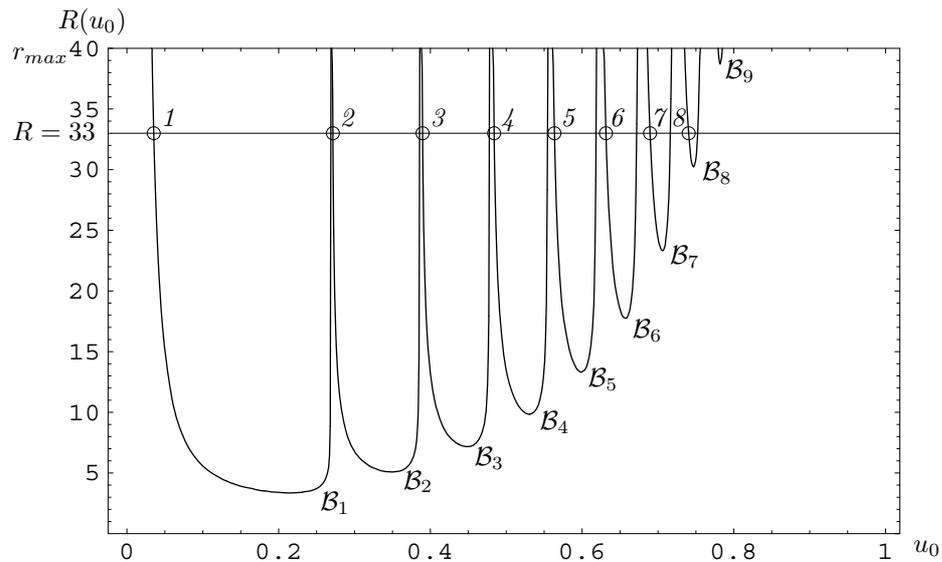


Abbildung 3.1: $R(u_0)$ für $n = 5, p = q = 4, \lambda = -10$. Die Anzahl Lösungen für $u_0 \in (0, 1)$ mit $R(u_0) = 33$ beträgt 16. Die Beispiele 1-8 werden in der Abbildung 3.2 gezeigt.

Lösungen des Randwertproblems

Mit $u(r) = u(r; u_0)$ bezeichnen wir eine Lösung des Anfangswertproblems (3.1). Das numerische Problem ist gegeben durch: finde $u_0 \in \mathbb{R}^+$ so, dass

$$u(R; u_0) = 0.$$

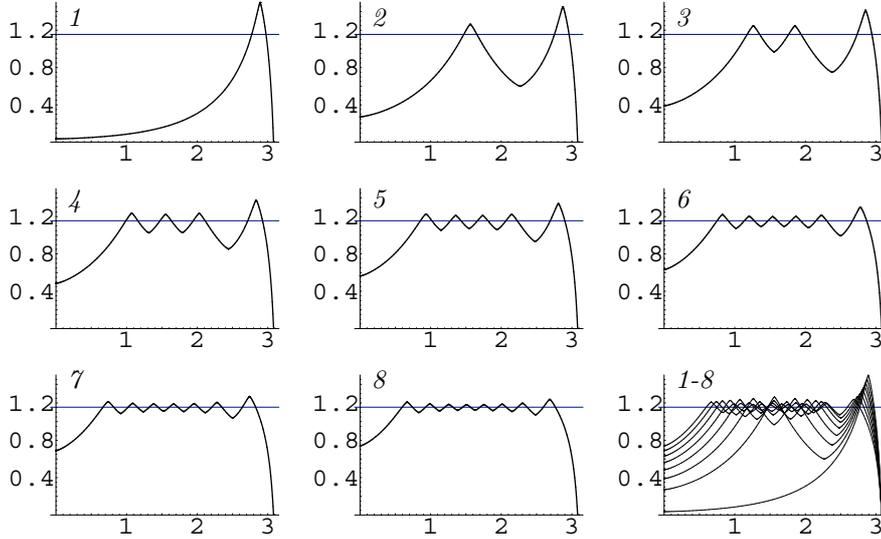


Abbildung 3.2: Lösungen in den θ -Koordinaten für $n = 5, p = q = 4, \lambda = -10$ mit $R = 33$

Mit Hilfe der Newton-Iteration berechnen wir den numerisch exakten Wert u_0 so, dass $u(r)$ eine Näherungslösung von

$$\begin{aligned}
 -(\rho^{n-p}r^{n-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r))' - \lambda\rho^n r^{n-1}|u|^{q-2}u &= \rho^n r^{n-1}|u|^{p^*-2}u \\
 \text{für } r \in (0, R) & \quad (3.2) \\
 u'(0) = u(R) &= 0
 \end{aligned}$$

für ein festes R ist, wobei wir in dem Fall der Einfachheit halber für die numerische Näherungslösung auch Vorzeichen wechselnde Lösungen zu lassen (wir ersetzen daher die Terme u^{s-1} durch $|u|^{s-2}u$). Die Newton-Iteration für u_0 ist gegeben durch

$$u_0^{i+1} = u_0^i - \left[\frac{\partial}{\partial u_0} u(R; u_0^i) \right]^{-1} u(R; u_0^i).$$

Um die Ableitung $\frac{\partial}{\partial u_0} u(R; u_0^i)$ zu berechnen, lösen wir die Differenzialgleichung für $v(r) = \frac{\partial}{\partial u_0} u(r; u_0^i)$, gegeben durch

$$\begin{aligned}
 -(\rho^{n-p}r^{n-1}(p-1)|u'(r)|^{p-2}v'(r))' - \lambda\rho^n r^{n-1}(q-1)|u|^{q-2}v & \\
 = \rho^n r^{n-1}(p^*-1)|u|^{p^*-2}v \quad \text{für } r \in (0, R) & \quad (3.3) \\
 v'(0) = 0 & \\
 v(0) = 1. &
 \end{aligned}$$

Durch die Substitution

$$\begin{aligned} x &:= \rho^{n-p} r^{n-1} |u'|^{p-2} u' \\ y &:= \rho^{n-p} r^{n-1} (p-1) |u'(r)|^{p-2} v'(r) \end{aligned} \quad (3.4)$$

in der Gleichung (3.1) und (3.3) erhalten wir ein Differenzialgleichungssystem erster Ordnung:

$$\begin{aligned} u'(r) &= \text{sign}(x) (\rho^{n-p} r^{n-1})^{-\frac{1}{p-1}} |x|^{\frac{1}{p-1}} & u(0) &= u_0 \\ x'(r) &= -\rho^n r^{n-1} (\lambda |u|^{q-2} u + |u|^{p^*-2} u) & x(0) &= 0 \\ v'(r) &= \frac{1}{p-1} (\rho^{n-p} r^{n-1})^{-\frac{1}{p-1}} |x|^{-\frac{p-2}{p-1}} y & v(0) &= 1 \\ y'(r) &= -\rho^n r^{n-1} (\lambda(q-1) |u|^{q-2} + (p^*-1) |u|^{p^*-2}) v & y(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

In jedem Schritt der Newton-Iteration benötigen wir $u(R; u_0^i)$ und $\frac{\partial}{\partial u_0} u(R; u_0^i)$. Da wir eine Runge-Kutta Methode mit flexibler Schrittweite benutzen, lösen wir das Differenzialgleichungssystem (3.5) bis $r > R$ ist und interpolieren dann zwischen $u(r_{n+1}; u_0^i)$ und $u(r_n; u_0^i)$, um $u(R, u_0^i)$ möglichst genau zu erhalten. Den Wert für $\frac{\partial}{\partial u_0} u(R; u_0^i)$ erhalten wir auf die gleiche Art und Weise. Das Differenzialgleichungssystem (3.5) ist in $r = 0$ singular. Für den ersten Schritt der Runge-Kutta Methode werten wir daher nicht die rechte Seite des Systems (3.5) aus, sondern benutzen die Anfangswerte $u'(0) = 0$ und $v'(0) = 0$.

3.3 Keller-Methode

Als Nächstes sollen die verschiedenen Lösungszweige in Abhängigkeit von λ für ein festes Gebiet berechnet werden. Dazu verwenden wir lineare finite Elemente und die Newton-Iteration. Wir suchen schwache Lösungen $u \in W^{1,p}([0, R], u(R) = 0) =: W^{1,p}$ von (3.2). Daher Lösungen die der Gleichung

$$\begin{aligned} &\int_0^R \rho^{n-p} r^{n-1} |u'|^{p-2} u' \varphi' - \lambda \rho^n r^{n-1} |u|^{q-2} u \varphi dr \\ &= \int_0^R \rho^n r^{n-1} |u|^{p^*-2} u \varphi dr \quad \forall \varphi \in C^\infty([0, R], \varphi(R) = 0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

genügen. Sei $G : W^{1,p} \times \mathbb{R} \rightarrow (W^{1,p})'$ definiert durch

$$\begin{aligned} G(u, \lambda)[\varphi] &:= \int_0^R \rho^{n-p} r^{n-1} |u'|^{p-2} u' \varphi' - \lambda \rho^n r^{n-1} |u|^{q-2} u \varphi dr \\ &\quad - \int_0^R \rho^n r^{n-1} |u|^{p^*-2} u \varphi dr, \end{aligned}$$

wobei $(W^{1,p})'$ den Dualraum von $W^{1,p}$ bezeichnet. Anstelle von (3.6) benutzen wir die äquivalente Formulierung: finde $u \in W^{1,p}$ so, dass $G(u, \lambda) = 0$ in $(W^{1,p})'$.

Mit Γ bezeichnen wir einen Lösungspfad $\Gamma = \{(u, \lambda) : G(u, \lambda) = 0\}$. In singulären Punkten, das sind Punkte in denen die Fréchet-Ableitung von G_u singulär ist (als Beispiel siehe Abbildung 3.3), kann die Fortsetzung von Γ fehlschlagen oder Probleme bereiten. Um diese Probleme bei einfachen

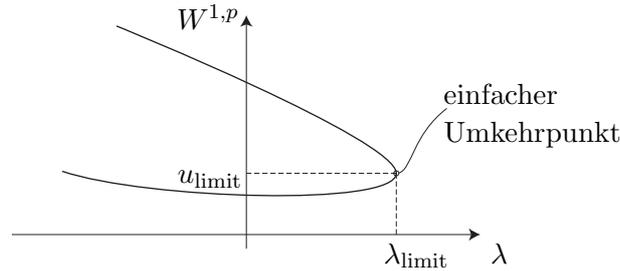


Abbildung 3.3: Beispiel für einen singulären Punkt

Umkehrpunkten zu umgehen, müssen wir eine geeignete Parametrisierung s von $\Gamma(s)$ wählen. Mit einem zusätzlichen Parameter $s \in \mathbb{R}$ können wir eine Nebenbedingung $N : W^{1,p} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ einführen. Anstelle von $G(u, \lambda) = 0$ lösen wir

$$\begin{aligned} G(u, \lambda) &= 0 \\ N(u, \lambda, s) &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Wir werden N so wählen, dass s eine Approximation der Bogenlänge auf einem Lösungspfad ist.

Sei $x \in \mathbb{X} \equiv (W^{1,p}([0, R]) \times \mathbb{R})$ und $P : \mathbb{X} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}'$ mit

$$x = (u, \lambda), \quad P(x, s) = \begin{pmatrix} G(u, \lambda) \\ N(u, \lambda, s) \end{pmatrix},$$

dann ist ein Lösungspfad Γ von (3.7) gegeben durch $x(s) = (u(s), \lambda(s))$ mit $P(x(s), s) = 0$. Zudem erfüllt $\dot{x} = \frac{dx(s)}{ds}$ auf einem glatten Lösungspfad die Gleichung

$$\mathcal{A}(s) \cdot \dot{x}(s) = - \begin{pmatrix} 0 \\ N_s(u, \lambda, s) \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

mit

$$\mathcal{A}(s) := \begin{pmatrix} G_u(u, \lambda) & G_\lambda(u, \lambda) \\ N_u(u, \lambda, s) & N_\lambda(u, \lambda, s) \end{pmatrix}.$$

Sei (u_0, λ_0) eine Lösung von (3.7) und $(\dot{u}_0, \dot{\lambda}_0)$ erfülle

$$\begin{aligned} G_u(u_0, \lambda_0)\dot{u}_0 + G_\lambda(u_0, \lambda_0)\dot{\lambda}_0 &= 0, \\ \|\dot{u}_0\|^p + |\dot{\lambda}_0|^2 &> 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dann bezeichnen wir (u_0, λ_0) als eine *reguläre Lösung (Punkt)*, falls zusätzlich die Fréchet-Ableitung $G_u(u_0, \lambda_0)$ nicht singular ist. Wir nennen (u_0, λ_0) ein *einfacher Umkehrpunkt*, falls (3.9) erfüllt ist und anstelle von “ $G_u(u_0, \lambda_0)$ ist nicht singular” gilt:

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{N}(G_u(u_0, \lambda_0)) &= \text{codim} \mathcal{R}(G_u(u_0, \lambda_0)) = 1, \\ G_\lambda(u_0, \lambda_0) &\notin \mathcal{R}(G_u(u_0, \lambda_0)), \end{aligned} \quad (3.10)$$

wobei \mathcal{R} den Bildraum und \mathcal{N} den Nullraum von $G_u(u_0, \lambda_0)$ bezeichnet.

Als Parametrisierung benutzen wir eine Pseudobogenlänge, welche von Keller [32] eingeführt wurde: Sei (u_0, λ_0) ein regulärer Punkt auf Γ und

$$N(u, \lambda, s) = \frac{1}{2} \langle \dot{u}^*(s_0), [u(s) - u(s_0)] \rangle + \frac{1}{2} \dot{\lambda}(s_0) [\lambda(s) - \lambda(s_0)] - (s - s_0),$$

wobei $\dot{u}^*(s_0) \in (W^{1,p})'$ das duale Element von $\dot{u}(s_0)$ ist. In [32] beweist Keller den folgenden Fortsetzungssatz über reguläre Punkte und einfache Umkehrpunkte mit Hilfe dieser Parametrisierung:

Satz 3.1 (Keller) *Sei (u_0, λ_0) ein regulärer Punkt oder ein einfacher Umkehrpunkt und $G(u, \lambda)$ besitze zwei stetige Ableitungen in einer Umgebung um (u_0, λ_0) . Dann folgt mit $(u(s_0), \lambda(s_0)) = (u_0, \lambda_0)$, $(\dot{u}(s_0), \dot{\lambda}(s_0)) = (\dot{u}_0, \dot{\lambda}_0)$ und $\dot{u}^*(s_0)$ wie oben definiert, dass ein eindeutiger glatter Lösungspfad $(u(s), \lambda(s))$ von (3.7) für $|s - s_0| \leq \delta$ mit $\delta > 0$ genügend klein existiert. Auf diesem Lösungspfad ist die Fréchet-Ableitung von P , $\mathcal{A}(s)$ nicht singular.*

Um $\dot{x}(s_0) = (\dot{u}(s_0), \dot{\lambda}(s_0))$ im regulären Fall zu berechnen, können wir die Gleichungen (3.8) benutzen und erhalten

$$y := \dot{u}_0 / \dot{\lambda}_0 = -G_u(u_0, \lambda_0)^{-1} G_\lambda(u_0, \lambda_0). \quad (3.11)$$

Für die zweite Gleichung von (3.8) erhalten wir dann

$$\frac{1}{2} \langle \dot{u}^*(s_0), \dot{u}(s_0) \rangle + \frac{1}{2} \dot{\lambda}(s_0) \dot{\lambda}(s_0) = 1.$$

Aus $\langle \dot{u}^*(s_0), \dot{u}(s_0) \rangle = \|\dot{u}(s_0)\|^p$, erhalten wir die nichtlineare Gleichung für $\dot{\lambda}(s_0)$

$$|\dot{\lambda}(s_0)|^p \|y\|^p + \dot{\lambda}(s_0)^2 = 2.$$

Nach dem wir $\dot{\lambda}(s_0)$ berechnet haben, folgt aus der Gleichung (3.11) $\dot{u}(s_0)$. Das Vorzeichen von $\dot{u}(s_0)$ hängt vom Vorzeichen von $\dot{\lambda}(s_0)$ ab. Daher kann die Richtung der Fortsetzung mit $s < s_0$ oder $s > s_0$ kontrolliert werden.

Um einen Lösungspfad Γ zu berechnen, benutzen wir $N(u, \lambda, s) = 0$ über eine Sequenz von Intervallen $[s_0, s_1], [s_1, s_2], \dots$. Die Newton-Iteration konvergiert in den jeweiligen Intervallen $[s_{k+1}, s_k]$, falls $|s_{k+1} - s_k| < \delta_k(u(s_k), \lambda(s_k))$ genügt, wobei δ_k der Konvergenzradius aus dem Satz 3.1 sei. Der resultierende Lösungspfad ist daher nur stückweise glatt in s , mit Knickunstetigkeiten in der Richtung des Tangentenvektors $(\dot{u}(s_k), \dot{\lambda}(s_k))$.

Algorithmus: Sei $s_0 = 0$.

- initialisiere x_0 regulär $\rightsquigarrow \circ$
- for $k = 1$ to m
 - berechne \dot{x}_0
 - while $|s| < \delta_k$, berechne Lösungen für unterschiedliche Werte von $s \rightsquigarrow \times$
 - setze ein neues reguläres $x_0 \rightsquigarrow \circ$

\rightsquigarrow siehe Abbildung 3.4.

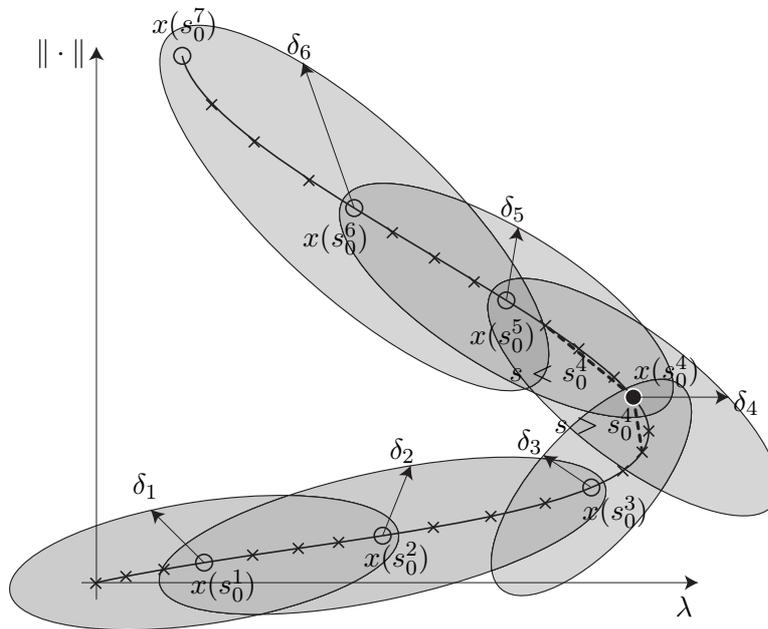


Abbildung 3.4: Keller-Methode

Situation auf der Sphäre

Für das Problem (3.2) sind die Einträge des Operators $\mathcal{A}(s)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} G_u(u, \lambda)[\psi, \varphi] &= (p-1) \int_0^R \rho^{n-p} r^{n-1} |u'|^{p-2} \psi' \varphi' dr \\ &\quad - \lambda(q-1) \int_0^R \rho^n r^{n-1} |u|^{q-2} \psi \varphi dr - (p^* - 1) \int_0^R \rho^n r^{n-1} |u|^{p^*-2} \psi \varphi dr, \\ G_\lambda(u, \lambda)[\varphi] &= - \int_0^R \rho^n r^{n-1} |u|^{q-2} u \varphi dr \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} N_u(u, \lambda, s)[\psi] &= \frac{1}{2} \int_0^R \rho^{n-p} r^{n-1} |\dot{u}'(s_0)|^{p-2} \dot{u}'(s_0) \psi' dr, \\ N_\lambda(u, \lambda, s) &= \frac{1}{2} \dot{\lambda}(s_0), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} N(u, \lambda, s) &= \frac{1}{2} \langle \dot{u}^*(s_0), [u(s) - u(s_0)] \rangle + \frac{1}{2} \dot{\lambda}(s_0) [\lambda(s) - \lambda(s_0)] - (s - s_0) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^R \rho^{n-p} r^{n-1} |\dot{u}'(s_0)|^{p-2} \dot{u}'(s_0) (u'(s) - u'(s_0)) dr \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{\lambda}(s_0) (\lambda(s) - \lambda(s_0)) - (s - s_0). \end{aligned}$$

Sei $V \subset W^{1,p}$ der endlich dimensionale Unterraum der linearen finiten Elemente mit $\dim V = N + 1$. Sei \mathcal{T}_N eine Zerlegung des Intervalls $[0, R]$ so, dass mehr Stützstellen bei null vorhanden sind (als Beispiel siehe Abbildung 3.5).

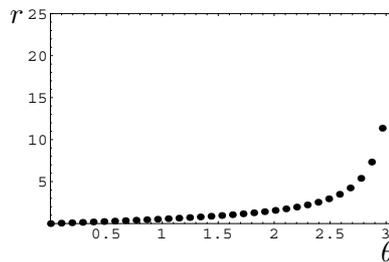


Abbildung 3.5: Verteilung der Stützstellen in den r, θ -Koordinaten

Sei $\{\varphi_i\}_{i=0}^N$ eine lineare finite Element Basis von V . $\tilde{u} \in V$ ist dann

gegeben durch $\tilde{u}(r) = \sum_{j=0}^N U_j \varphi_j$, $U \in \mathbb{R}^{N+1}$. Sei

$$\begin{aligned} (A)_{i,j} &= \int_0^R \rho^{n-p} r^{n-1} \left| \sum_k U_k \varphi_k' \right|^{p-2} \varphi_i' \varphi_j' dr \\ (B)_{i,j} &= \int_0^R \rho^n r^{n-1} \left| \sum_k U_k \varphi_k \right|^{q-2} \varphi_i \varphi_j dr \\ (C)_{i,j} &= \int_0^R \rho^n r^{n-1} \left| \sum_k U_k \varphi_k \right|^{p^*-2} \varphi_i \varphi_j dr \\ (D)_{i,j} &= \int_0^R \rho^{n-p} r^{n-1} \left| \sum_k \dot{U}(s_0) \varphi_k' \right|^{p-2} \varphi_i' \varphi_j' dr. \end{aligned}$$

Im Unterraum V ist die finite Element Diskretisierung $\tilde{\mathcal{A}}$ von \mathcal{A} gegeben durch

$$\tilde{\mathcal{A}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} \left[(p-1)A - \lambda(q-1)B - (p^*-1)C \right] & -B \cdot U \\ \hline \frac{1}{2} \dot{U}(s_0)^T \cdot D & \frac{1}{2} \dot{\lambda}(s_0) \end{array} \right),$$

und für die finite Element Diskretisierung \tilde{P} von P erhalten wir

$$\tilde{P}(\tilde{x}, s) = \left(\begin{array}{c} (A - \lambda B - C) \cdot U \\ \frac{1}{2} \dot{U}(s_0)^T \cdot D \cdot (U - U(s_0)) + \frac{1}{2} \dot{\lambda}(s_0) (\lambda - \lambda(s_0)) - (s - s_0) \end{array} \right).$$

Die Newton-Iteration ist gegeben durch

$$\tilde{x}^{n+1} = \tilde{x}^n - \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{x}^n, s)^{-1} \tilde{P}(\tilde{x}^n, s).$$

Den ersten Punkt \tilde{x}_0 auf dem Näherungslösungspfad berechnen wir mit der Newton-Iteration, wobei wir als Startwert die Näherungslösung aus der Schiessmethode verwenden. In jedem Teilschritt müssen die Matrizen A, B, C neu berechnet werden. Der Vektor $\dot{U}(s_0)^T \cdot D$ ist konstant.

Numerische Berechnungen im Grenzbereich der Existenz

Numerische Resultate müssen im Grenzbereich der Existenz sorgfältig interpretieren werden. Im folgenden Beispiel (Abbildung 3.6) ist $R \approx R_0$, das numerisch berechnete R_0 aus dem Satz 2.7. Für $\lambda < 0$ kann in der L^∞ -Norm keine Konvergenz beobachtet werden. $-\partial_\lambda I_\lambda$ strebt in dem Bereich gegen null.

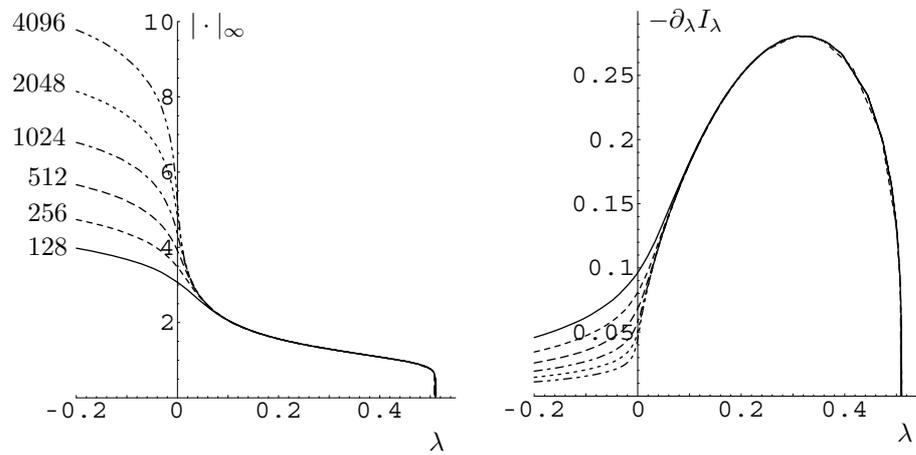


Abbildung 3.6: Lösungszweige für $R = 3$, $n = 4$, $p = q = 3$, mit unterschiedlicher Anzahl Stützstellen $N = 128, 256, 512, 1024, 2048, 4098$

Anhang A

Substitution auf konformen Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten die partielle Differenzialgleichung

$$-\Delta_{\mathcal{M}}u - \lambda u^{q-1} = u^{\frac{n+2}{n-2}} \quad (\text{A.1})$$

auf einer konformen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} . Mit Hilfe der stereographischen Projektion in den euklidischen Raum \mathbb{R}^n erhalten wir die Differenzialgleichung

$$-\rho^{-n} \operatorname{div}(\rho^{n-2} \nabla u) - \lambda u^{q-1} = u^{\frac{n+2}{n-2}}. \quad (\text{A.2})$$

Mit $u = g v$ folgt für $\operatorname{div}(f \nabla u)$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f \nabla u) &= \nabla f \cdot \nabla u + f \Delta u \\ &= (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) v + (g \nabla f + 2f \nabla g) \nabla v + f g \Delta v \\ &= \operatorname{div}(f \nabla g) v + (g \nabla f + 2f \nabla g) \nabla v + f g \Delta v. \end{aligned}$$

Um den ∇v -Term zu eliminieren, muss

$$(g \nabla f + 2f \nabla g) = 0$$

erfüllt sein und somit

$$-\frac{1}{2} \frac{\nabla f}{f} = \frac{\nabla g}{g}.$$

Im Fall $f = \rho^{n-2}$ erhalten wir die Gleichung

$$-\frac{n-2}{2} \frac{\nabla \rho}{\rho} = \frac{\nabla g}{g}$$

und mit $g = \rho^{-\frac{n-2}{2}}$ eine Lösung. Für den Ausdruck $\operatorname{div}(f \nabla g)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f \nabla g) &= -\operatorname{div} \left(\frac{n-2}{2} \rho^{\frac{n-4}{2}} \nabla \rho \right) \\ &= -\Delta \left(\rho^{\frac{n-2}{2}} \right). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Differenzialgleichung für die skalare Krümmung K

$$-\Delta \left(\rho^{\frac{n-2}{2}} \right) = \frac{n-2}{4(n-1)} K \rho^{\frac{n+2}{2}} \quad (\text{A.3})$$

erhalten wir für die partielle Differenzialgleichung (A.2)

$$-\rho^{-\frac{n+2}{2}} \Delta v - \frac{n-2}{4(n-1)} K \rho^{-\frac{n-2}{2}} v - \lambda \rho^{-(q-1)\frac{n-2}{2}} v^{q-1} = \rho^{-\frac{n+2}{2}} v^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Es folgt das Lemma:

Lemma A.1 $u = \rho^{-\frac{n-2}{2}} v$ genügt der Gleichung (A.1), wobei v eine Lösung der partiellen Differenzialgleichung

$$-\Delta v - \frac{n-2}{4(n-1)} K \rho^2 v - \lambda \rho^{n-q\frac{n-2}{2}} v^{q-1} = v^{\frac{n+2}{n-2}} \quad (\text{A.4})$$

ist.

Beispiele konformer Mannigfaltigkeit mit konstanter skalarer Krümmung sind:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n : \quad K_{\mathbb{R}^n} &= 0 & \rho_{\mathbb{R}^n} &= 1 \\ \mathbb{S}^n : \quad K_{\mathbb{S}^n} &= n(n-1) & \rho_{\mathbb{S}^n} &= \frac{2}{1+|x|^2} \\ \mathbb{H}^n : \quad K_{\mathbb{H}^n} &= -n(n-1) & \rho_{\mathbb{H}^n} &= \frac{2}{1-|x|^2}. \end{aligned}$$

Lemma A.2 Sei $q = 2$ und $\mathcal{M} \in \{\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n\}$, dann ist die Funktion

$$u_\varepsilon^*(x) = \rho_{\mathcal{M}}^{-\frac{n-2}{2}} \frac{(n(n-2)\varepsilon^2)^{\frac{n-2}{4}}}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}} \quad (\text{A.5})$$

eine Lösung von (A.2) in \mathbb{R}^n mit $\lambda = 0$ im Fall $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, $\lambda = -\frac{n(n-2)}{4}$ im Fall $\mathcal{M} = \mathbb{S}^n$ und $\lambda = \frac{n(n-2)}{4}$ im Fall $\mathcal{M} = \mathbb{H}^n$.

Beweis: Direktes Nachrechnen. □

Zudem gilt

$$\|u_\varepsilon\|_{L^{2^*}}^{2^*} = \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon|^{2^*} dx = S_2^{n/2} \quad (\text{A.6})$$

und

$$\|u_\varepsilon\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx = S_2^{n/2}. \quad (\text{A.7})$$

Anhang B

Die Pohozaev-Identität

Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= g(x, u) \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{B.1}$$

wobei $\Delta_p u = \operatorname{div}(a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ mit $1 < p < n$ und $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Caratheodory Funktion ist. In [21] hat Egnell die wohl bekannte Pohozaev-Identität für den p -Laplace bewiesen:

Lemma B.1 (Egnell) *Sei $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ eine schwache Lösung von (B.1), dann erfüllt u die Pohozaev-Identität*

$$\begin{aligned} \frac{p-1}{p} \int_{\partial\Omega} a(x) \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^p (x \cdot \nu) d\sigma &= - \int_{\Omega} \left(\frac{n-p}{p} a + \frac{1}{p} x \cdot \nabla a \right) |\nabla u|^p dx \\ &+ \int_{\Omega} (nG(x, u) + x \cdot \nabla_x G(x, u)) dx \end{aligned} \tag{B.2}$$

mit $G(x, u) = \int_0^u g(x, s) ds$ und $\nabla_x G(x, u) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} G(x, u) \right)_{i=1, \dots, n}$.

Die Identität (B.2) auf das Problem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= \lambda b(x)u^{q-1} + c(x)u^{s-1} \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &> 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{B.3}$$

angewendet, führt zu dem folgenden Nichtexistenzresultat:

Korollar B.2 *Sei $s \geq \frac{np}{n-p}$, $x \cdot \nabla a > 0$, $x \cdot \nabla c < 0$ in Ω und*

a) für $\lambda \leq 0$ sei $q < s$ und $b \geq 0$, $x \cdot \nabla b > 0$ in Ω oder allgemeiner

$$\left(n - \frac{nq}{s} \right) b + x \cdot \nabla b > 0 \quad \text{in } \Omega,$$

b) für $\lambda \geq 0$ sei $q > s$ und $b \geq 0$, $x \cdot \nabla b < 0$ in Ω oder allgemeiner

$$\left(n - \frac{nq}{s}\right) b + x \cdot \nabla b < 0 \text{ in } \Omega,$$

dann existiert für die Gleichung (B.3) in bezüglich 0 sternförmigen Gebieten keine schwache Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Ferner erfüllt eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ von (B.3) die Pohozaev-Identität

$$\begin{aligned} \frac{p-1}{p} \int_{\partial\Omega} a \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^p (x \cdot \nu) d\sigma &= \int_{\Omega} \left[\left(-\frac{n-p}{p} + \frac{n}{s} \right) a - \frac{x \cdot \nabla a}{p} \right] |\nabla u|^p dx + \\ &+ \int_{\Omega} \left(\lambda \left[\left(\frac{n}{q} - \frac{n}{s} \right) b + \frac{x \cdot \nabla b}{q} \right] u^q + \frac{x \cdot \nabla c}{s} u^s \right) dx. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Beweis: Sei $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ eine schwache Lösung von (B.3), dann folgt aus dem Lemma B.1 für u die Pohozaev-Identität

$$\begin{aligned} \frac{p-1}{p} \int_{\partial\Omega} a \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^p (x \cdot \nu) d\sigma &= - \int_{\Omega} \left(\frac{n-p}{p} a + \frac{x \cdot \nabla a}{p} \right) |\nabla u|^p dx \\ &+ \int_{\Omega} \left(\frac{n}{q} \lambda b u^q + \frac{n}{s} c u^s \right) dx + \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{q} (x \cdot \nabla b) u^q + \frac{1}{s} (x \cdot \nabla c) u^s \right) dx. \end{aligned}$$

Aus der Gleichung $\int_{\Omega} a |\nabla u|^p dx = \int_{\Omega} (\lambda b u^q + c u^s) dx$ erhalten wir die Identität (B.4), womit leicht die Behauptung folgt. \square

Korollar B.3 Sei Ω bezüglich 0 sternförmig, $q = p$, $s = p^*$, $\lambda \leq 0$, $x \cdot \nabla a \geq 0$, $x \cdot \nabla c \leq 0$ und $p b + x \cdot \nabla b > 0$, dann existiert für das Problem (B.3) keine schwache Lösung in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Für das Brezis-Nirenberg-Problem auf einer konformen n -dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, gilt der Spezialfall $a(x) = \rho^{n-p}$ und $b(x) = c(x) = \rho^n$. Aus dem Korollar B.2 erhalten wir die Pohozaev-Identität:

$$\begin{aligned} \frac{p-1}{np} \int_{\partial\Omega} \rho^{n-p} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^p (x \cdot \nu) d\sigma &= - \int_{\Omega} \left[\frac{1}{p^*} (1 + \rho^{-1} \nabla \rho \cdot x) - \frac{1}{s} \right] |\nabla u|^p \rho^{n-p} dx \\ &+ \lambda \int_{\Omega} \left[\frac{1}{q} (1 + \rho^{-1} \nabla \rho \cdot x) - \frac{1}{s} \right] u^q \rho^n dx + \int_{\Omega} \frac{1}{s} (\nabla \rho \cdot x) u^s \rho^{n-1} dx. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Aus dieser Identität folgt leicht das Korollar:

Korollar B.4 Sei Ω bezüglich 0 sternförmig, $\lambda < 0$, $s > \frac{np}{n-p}$, $q < s$, $a(x) = \rho^{n-p}$, $b(x) = c(x) = \rho^n$ und

$$0 > \nabla \rho \cdot x > \left(\frac{p^*}{s} - 1 \right) \rho \text{ in } \Omega,$$

dann existiert für (B.3) keine schwache Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Literaturverzeichnis

- [1] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
- [2] A. AMBROSETTI, H. BREZIS, AND G. CERAMI, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal., 122 (1994), pp. 519–543.
- [3] T. AUBIN, *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [4] C. BANDLE AND R. BENGURIA, *The Brézis-Nirenberg problem on S^3* , J. Differential Equations, 178 (2002), pp. 264–279.
- [5] C. BANDLE, A. BRILLARD, AND M. FLUCHER, *Green's function, harmonic transplantation, and best Sobolev constant in spaces of constant curvature*, Trans. Amer. Math. Soc., 350 (1998), pp. 1103–1128.
- [6] C. BANDLE, J. FLECKINGER, AND F. DE THÉLIN, *Boundary value problems for the q -Laplacian on S^N* , Math. Nachr., 224 (2001), pp. 5–16.
- [7] C. BANDLE AND L. A. PELETIER, *Best Sobolev constants and Emden equations for the critical exponent in S^3* , Math. Ann., 313 (1999), pp. 83–93.
- [8] C. BANDLE, L. A. PELETIER, AND S. STINGELIN, *Best sobolev constants and quasilinear elliptic equations with critical growth in spaces of constant curvature*, in preparation, (2004).
- [9] C. BANDLE AND W. REICHEL, *Handbook of Differential Equations: Solutions of Quasilinear Second-Order Elliptic Boundary Value Problems via Degree Theory*, vol. Volume 1, Edited by M. Chipot and P. Quittner. In preparation, (2004).
- [10] H. BREZIS, *Elliptic equations with limiting Sobolev exponents—the impact of topology*, Comm. Pure Appl. Math., 39 (1986), pp. S17–S39. Frontiers of the mathematical sciences: 1985 (New York, 1985).

- [11] H. BREZIS AND S. KAMIN, *Sublinear elliptic equations in \mathbf{R}^n* , Manuscripta Math., 74 (1992), pp. 87–106.
- [12] H. BRÉZIS AND E. LIEB, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc., 88 (1983), pp. 486–490.
- [13] H. BRÉZIS AND L. NIRENBERG, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math., 36 (1983), pp. 437–477.
- [14] H. BREZIS AND L. NIRENBERG, *H^1 versus C^1 local minimizers*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 317 (1993), pp. 465–472.
- [15] F. BROCK AND J. PRAJAPAT, *Some new symmetry results for elliptic problems on the sphere and in Euclidean space*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 49 (2000), pp. 445–462.
- [16] S.-S. CHOW, *Finite element error estimates for nonlinear elliptic equations of monotone type*, Numer. Math., 54 (1989), pp. 373–393.
- [17] P. G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, vol. 40 of Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002. Reprint of the 1978 original.
- [18] F. DE THÉLIN, *Résultats d’existence et de non-existence pour la solution positive et bornée d’une e.d.p. elliptique non linéaire*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5), 8 (1986/87), pp. 375–389.
- [19] M. DEL PINO, J. DOLBEAULT, AND M. MUSSO, *“Bubble-tower” radial solutions in the slightly supercritical Brezis-Nirenberg problem*, J. Differential Equations, 193 (2003), pp. 280–306.
- [20] J. I. DÍAZ, *Nonlinear partial differential equations and free boundaries. Vol. I*, vol. 106 of Research Notes in Mathematics, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985. Elliptic equations.
- [21] H. EGNELL, *Existence and nonexistence results for m -Laplace equations involving critical Sobolev exponents*, Arch. Rational Mech. Anal., 104 (1988), pp. 57–77.
- [22] ———, *Semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Arch. Rational Mech. Anal., 104 (1988), pp. 27–56.
- [23] ———, *Elliptic boundary value problems with singular coefficients and critical nonlinearities*, Indiana Univ. Math. J., 38 (1989), pp. 235–251.

-
- [24] J. GARCÍA AZORERO AND I. PERAL ALONSO, *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term*, Trans. Amer. Math. Soc., 323 (1991), pp. 877–895.
- [25] ———, *On limits of solutions of elliptic problems with nearly critical exponent*, Comm. Partial Differential Equations, 17 (1992), pp. 2113–2126.
- [26] ———, *Some results about the existence of a second positive solution in a quasilinear critical problem*, Indiana Univ. Math. J., 43 (1994), pp. 941–957.
- [27] B. GIDAS, W. M. NI, AND L. NIRENBERG, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys., 68 (1979), pp. 209–243.
- [28] D. GILBARG AND N. S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [29] M. GUEDDA AND L. VÉRON, *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal., 13 (1989), pp. 879–902.
- [30] H. B. KELLER, *Shooting and embedding for two-point boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl., 36 (1971), pp. 598–610.
- [31] ———, *Numerical solution of two point boundary value problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1976. Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 24.
- [32] ———, *Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems*, in Applications of bifurcation theory (Proc. Advanced Sem., Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1976), Academic Press, New York, 1977, pp. 359–384. Publ. Math. Res. Center, No. 38.
- [33] S. KUMARESAN AND J. PRAJAPAT, *Analogue of Gidas-Ni-Nirenberg result in hyperbolic space and sphere*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, 30 (1998), pp. 107–112 (1999).
- [34] M. K. KWONG AND Y. LI, *Uniqueness of radial solutions of semilinear elliptic equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 333 (1992), pp. 339–363.
- [35] P.-L. LIONS, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. II*, Rev. Mat. Iberoamericana, 1 (1985), pp. 45–121.
- [36] J. H. MADDOCKS, *Stability and folds*, Arch. Rational Mech. Anal., 99 (1987), pp. 301–328.

- [37] P. PADILLA, *Symmetry properties of positive solutions of elliptic equations on symmetric domains*, Appl. Anal., 64 (1997), pp. 153–169.
- [38] W. REICHEL, *Uniqueness theorems for variational problems by the method of transformation groups*, University of Basel, Habilitationsschrift, 2002.
- [39] H.-R. SCHWARZ, *Numerische Mathematik*, B. G. Teubner, Stuttgart, third ed., 1993. With a contribution by Jörg Waldvogel.
- [40] S. STAPELKAMP, *Das Brezis-Nirenberg Problem im \mathbb{H}^n* , PhD thesis, Universität Basel, 2003.
- [41] M. STRUWE, *Variational methods*, vol. 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)* [Results in Mathematics and Related Areas (3)], Springer-Verlag, Berlin, second ed., 1996. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.
- [42] P. TOLKSDORF, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Differential Equations, 51 (1984), pp. 126–150.