

Das Brezis-Nirenberg Problem im \mathbb{H}^n

Inauguraldissertation

zur

Erlangung der Würde eines Doktors der Philosophie
vorgelegt der
Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel

von

Silke Stapelkamp
aus Dinslaken (Deutschland)

Köln, 2003

Genehmigt von der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
auf Antrag von

Prof. Dr. C. Bandle

Prof. Dr. A. Brillard (Université de Haute-Alsace, Mulhouse)

Basel, den 11. Februar 2003

Prof. Dr. M. Tanner
Dekan

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Der n-dimensionale hyperbolische Raum \mathbb{H}^n	5
2.1	Modelle des hyperbolischen Raums	5
2.2	Das konforme Kugelmodell im speziellen	8
3	Symmetrisierung und harmonische Verpflanzung	15
3.1	Symmetrisierung im \mathbb{H}^n	15
3.2	Harmonische Verpflanzung im \mathbb{H}^n	18
4	Eigenwerte des Laplace-Beltrami-Operators $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$	21
4.1	Der erste Eigenwert auf beschränkten Mengen $D' \subsetneq \mathbb{H}^n$	21
4.1.1	Abschätzungen des Eigenwerts λ_1 für $n \geq 3$	22
4.1.2	Der Eigenwert λ_1 für $n = 3$	29
4.2	Der erste Eigenwert auf \mathbb{H}^n	31
5	Das Brezis-Nirenberg Problem im \mathbb{H}^n	33
5.1	Erste Betrachtungen	33
5.1.1	Regularität von Lösungen	33
5.1.2	Radialsymmetrie von Lösungen	36
5.1.3	Gebietstransformationen	37
5.1.4	Variationsproblem	41
5.1.5	Das Prinzip der konzentrierten Kompaktheit	43
5.2	Nichtexistenz von Lösungen	44

5.2.1	Nichtexistenz für $\lambda \geq \lambda_1$	44
5.2.2	Nichtexistenz für $\lambda \leq \frac{n(n-2)}{4}$	45
5.3	Der Fall $n \geq 4$	48
5.4	Der Fall $n = 3$	59
5.4.1	Das Brezis-Nirenberg Problem auf Kugeln	59
5.4.2	Das Brezis-Nirenberg Problem auf allgemeineren Gebieten	74
5.4.3	Über eine Vermutung von Budd & Humphries	75
5.5	Eigenschaften von Lösungen	78
5.5.1	Eindeutigkeit von Lösungen	78
5.5.2	Verhalten von Lösungen für $\lambda \searrow \lambda^*$ beziehungsweise $\lambda \nearrow \lambda_1$	80
5.6	Gegenüberstellung der Ergebnisse für \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n und \mathbb{S}^3	81
6	Vergleichssätze für allgemeinere Metriken	85
7	p-Laplace Gleichungen im \mathbb{H}^n	95
A	Anhang	101
A.1	Eine Transformation des Brezis-Nirenberg Problems	101
A.2	Der Eigenwert Λ_1 des Laplace-Operators $-\Delta$ auf $B_1(0)$	103
A.3	Zwei Ungleichungen	105
	Literaturverzeichnis	109

1 Einleitung

Brézis und Nirenberg betrachten in [BN] das nichtlineare, elliptische Randwertproblem

$$\begin{aligned}\Delta u + \lambda u + u^{2^*-1} &= 0 && \text{in } D \\ u &> 0 && \text{in } D \\ u &= 0 && \text{auf } \partial D.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Hierbei ist $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ ein beschränktes Gebiet, $2^* = \frac{2n}{n-2}$ der kritische Sobolev-exponent und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter. In Abhängigkeit von λ untersuchen die Autoren die Existenz von Lösungen dieses Randwertproblems, das in der Literatur meist mit Brézis-Nirenberg Problem bezeichnet wird.

Lösungen von (1.1) entsprechen kritischen Punkten des Variationsproblems

$$\begin{aligned}S_\lambda(D) &= \inf_{u \in X} \left\{ \int_D |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_D u^2 dx \right\}, \\ \text{mit } X &= \left\{ u \in H_0^{1,2}(D) \mid \int_D u^{2^*} dx = 1 \right\}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Hierbei bezeichnet $H_0^{1,2}(D)$ die Vervollständigung von $C_0^\infty(D)$ bezüglich der Norm $\|u\|_{1,2} = (\int_D |\nabla u|^2 dx)^{1/2}$. Da die Sobolev-Einbettung von $H_0^{1,2}(D)$ nach $L^{2^*}(D)$ nur noch stetig und nicht mehr kompakt ist (vergl. [Ad, 5.4, 6.2]), lassen sich die Standard-Methoden der Variationsrechnung nicht anwenden, um die Existenz eines Minimierers von (1.2) und somit einer Lösung des Randwertproblems (1.1) zu zeigen.

Die ursprüngliche Motivation für Brézis und Nirenberg, die Gleichung (1.1) zu untersuchen, war das aus dem Bereich der Riemannschen Geometrie stammende Yamabe-Problem (vergl. [Tru], [Aub]) sowie weitere Probleme aus der Geometrie und Physik, die ebenfalls einen „Mangel an Kompaktheit“ aufweisen (vergl. [BN]).

In seinem Übersichtsartikel zu Randwertproblemen der Form (1.1) stellt Brézis [Bre] fest, daß die Existenz von Lösungen einerseits von λ , andererseits aber auch von der Topologie beziehungsweise Geometrie des Grundgebiets D abhängt. Ausgehend davon betrachten Bandle, Brillard und Flucher [BBF] dieses Problem auf Gebieten in Räumen konstanter skalarer Krümmung. Die skalare Krümmung R_g einer

n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit M mit einer Metrik g kann dabei einerseits mit Hilfe der Metrik abstrakt definiert werden (vergl. [Aub, 1.2.3]). Andererseits ist die skalare Krümmung $R_g(x)$ ein Maß für die Abweichung des Volumens einer kleinen geodätischen Kugel $\mathfrak{B}_r(x)$ auf der Mannigfaltigkeit vom Volumen einer euklidischen Kugel mit demselben Radius. Für $x \in M$ und kleine Radien r gilt die Formel (vergl. [GHL, 3.98])

$$\frac{\text{Vol}(\mathfrak{B}_r(x))}{\text{Vol}(B_r(0))} = 1 - \frac{R_g(x)}{6(n+2)}r^2 + o(r^2). \quad (1.3)$$

Betrachtet man Räume mit konstanter skalarer Krümmung, daß heißt $R_g(x) = R_g$ für alle $x \in M$, so unterscheidet man die drei Fälle $R_g = 0$, $R_g > 0$ und $R_g < 0$. Als Modellräume dienen der euklidische Raum \mathbb{R}^n mit $R_g = 0$, die Sphäre \mathbb{S}^n mit $R_g = n(n-1)$ und der hyperbolische Raum \mathbb{H}^n mit $R_g = -n(n-1)$ (vergl. [BBF]).

Für Gebiete im \mathbb{R}^n , $n \geq 3$ ist das Brézis-Nirenberg Problem in [BN] gelöst worden. Der Spezialfall der 3-dimensionalen Sphäre \mathbb{S}^3 wird in [BB] behandelt. In dieser Arbeit wird das Brézis-Nirenberg Problem im n-dimensionalen hyperbolischen Raum \mathbb{H}^n untersucht. Dabei wird $n \geq 3$ angenommen, da für $n = 1, 2$ die Einbettung $H_0^{1,2}(D) \subset L^p(D)$ für alle $1 < p < \infty$ kompakt ist, und die Existenz einer Lösung mit der direkten Methode der Variationsrechnung gezeigt werden kann.

Der Inhalt dieser Arbeit

In Kapitel 2 werden zunächst verschiedene Modelle des n-dimensionalen hyperbolischen Raums \mathbb{H}^n vorgestellt. Im Anschluß daran wird das konforme Kugelmodell, mit dem im folgenden gearbeitet wird, detaillierter erläutert.

Das Kapitel 3 führt sowohl in die Methode der Symmetrisierung von Funktionen als auch in die Methode der harmonischen Verpflanzung von Funktionen im hyperbolischen Raum ein. Beide Methoden ermöglichen Abschätzungen von Variationsfunktionalen durch Konstruktion geeigneter Testfunktionen.

Das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta_{\mathbb{H}^n} u &= \lambda u && \text{in } D' \subset \mathbb{H}^n \\ u &= 0 && \text{auf } \partial D' \end{aligned} \quad (1.4)$$

wird in Kapitel 4 behandelt. Dabei ist $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$ der Laplace-Beltrami-Operator in \mathbb{H}^n . Zunächst wird eine untere beziehungsweise obere Schranke für den ersten Eigenwert λ_1 hergeleitet, im Anschluß daran wird der erste Eigenwert auf geodätischen Kugeln im \mathbb{H}^3 explizit ausgerechnet.

Das Kapitel 5 enthält die Hauptergebnisse dieser Arbeit. Zu Beginn wird das Brézis-Nirenberg Problem im n-dimensionalen hyperbolischen Raum \mathbb{H}^n formuliert und die

C^2 -Regularität von Lösungen desselben bewiesen. Außerdem wird gezeigt, daß keine Lösung existiert, falls $\lambda \geq \lambda_1$ ist. Wie auch im euklidischen Fall (vergl. [BN]) muß dann zwischen den Raumdimensionen $n \geq 4$ und $n = 3$ unterschieden werden.

Für $n \geq 4$ hat das Brézis-Nirenberg Problem auf beschränkten Gebieten $D' \subset \mathbb{H}^n$ für alle $\lambda \in (\frac{n(n-2)}{4}, \lambda_1)$ eine Lösung. Ist D' sternförmig, existiert für $\lambda \leq \frac{n(n-2)}{4}$ keine Lösung (vergl. Abschnitt 5.3).

Im Fall $n = 3$ hängt die untere Grenze des Existenzbereichs von der Größe des Grundgebiets ab. Für geodätische Kugeln wird die Grenze exakt angegeben, für allgemeinere Gebiete bleibt das Problem offen (vergl. Abschnitt 5.4).

Der Existenzbeweis wird in beiden Fällen mit Hilfe des Prinzips der konzentrierten Kompaktheit [Li] geführt, das eine Möglichkeit darstellt, den „Mangel an Kompaktheit“ auszugleichen. Die Nichtexistenzresultate folgen aus Pohožaev-Identitäten. Zum Abschluß des Abschnitts 5.4 wird gezeigt, daß eine Vermutung von Budd und Humphries [BuH] bezüglich der unteren Grenze des Existenzbereichs für geodätische Kugeln im \mathbb{H}^3 richtig ist.

In Abschnitt 5.5 wird die Eindeutigkeit von Lösungen untersucht sowie ihr Verhalten am Rande des Existenzbereichs. Schließlich werden die Ergebnisse für \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n und \mathbb{S}^3 gegenübergestellt.

In Kapitel 6 werden mit Hilfe der Existenzresultate aus Kapitel 5 weitere Existenzsätze für das Brézis-Nirenberg Problem auf Mannigfaltigkeiten mit allgemeiner konformer Metrik hergeleitet. Zur Illustration sind einige Beispiele angegeben.

In Kapitel 7 wird das Brézis-Nirenberg Problem für den p -Laplace-Beltrami-Operator im \mathbb{H}^n formuliert und ein allgemeines Existenzresultat für Gleichungen dieses Typs von Egnell [Eg2] erläutert. Im Anschluß daran wird die Nichtexistenz von Lösungen auf kleinen Kugeln für negative Werte von λ mit Hilfe eines Pohožaev-Arguments gezeigt. Offen bleibt die Frage nach dem exakten Existenzbereich von Lösungen.

Dank

Ich möchte Frau Prof. C. Bandle herzlich für die hervorragende Betreuung während des Entstehens dieser Arbeit danken. Sie hat es verstanden, mich immer tiefer in die Welt der Mathematik einzuführen und hatte stets Zeit für Diskussionen und ein offenes Ohr für meine Fragen.

Dr. Wolfgang Reichel danke ich für die vielen Gespräche und wertvollen Anregungen „zwischen den Bürotüren“.

Für die finanzielle Förderung bin ich dem Schweizerischen Nationalfonds (Projekt Nr. 2100-063791) zu Dank verpflichtet.

Meiner Familie, insbesondere meinen Eltern, danke ich für die fortwährende Unterstützung meiner Ausbildung.

2 Der n-dimensionale hyperbolische Raum \mathbb{H}^n

2.1 Modelle des hyperbolischen Raums

Es gibt verschiedene Modelle für den n-dimensionalen hyperbolischen Raum \mathbb{H}^n , die jeweils zueinander isometrisch diffeomorph sind. Drei dieser Modelle werden hier kurz vorgestellt. Für Details sei zum Beispiel auf [BeP] oder [Ra] verwiesen.

Das Hyperboloidmodell

Wir betrachten die Teilmenge

$$H^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1, x_{n+1} > 0\}$$

des (n+1)-dimensionalen euklidischen Raums \mathbb{R}^{n+1} und versehen diese mit der Metrik

$$d_H(x, y) = \text{Arcosh}(-x_1y_1 - \dots - x_ny_n + x_{n+1}y_{n+1}).$$

Den metrischen Raum (H^n, d_H) nennt man das Hyperboloid-Modell des n-dimensionalen hyperbolischen Raums \mathbb{H}^n .

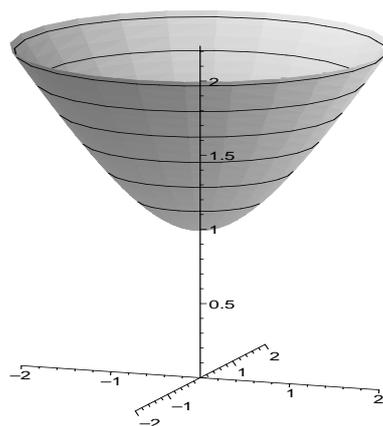


Abbildung 2.1: Die Menge H^2

Bemerkung 2.1 Analogien zwischen sphärischer und hyperbolischer Geometrie motivieren dieses Modell (vergl. [Ra, § 1.1, § 3.2]):

Eine Kugel vom Radius r in \mathbb{R}^{n+1} hat konstante Krümmung $\frac{1}{r^2} > 0$, der n -dimensionale hyperbolische Raum hat konstante negative Krümmung. Daher liegt es nahe, daß der hyperbolische Raum durch eine Kugel von imaginärem Radius realisiert werden kann. Imaginäre Abstände sind unter anderem im Lorentz-Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{n,1} = (\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{n,1})$ möglich, wobei

$$\langle x, y \rangle_{n,1} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}$$

eine symmetrische Bilinearform auf \mathbb{R}^{n+1} ist. Eine Kugel mit imaginärem Einheitsradius entspricht der Menge

$$F^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_{n,1}^2 := \langle x, x \rangle_{n,1} = i^2 = -1 \right\}.$$

Dies ist ein Hyperboloid mit zwei Halbschalen.

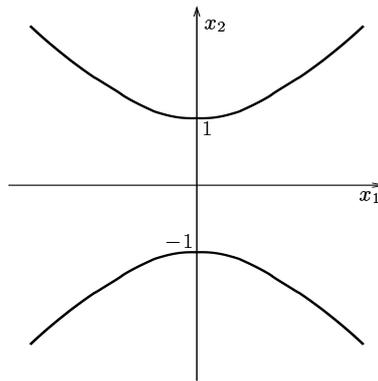


Abbildung 2.2: Die Menge F^1

Beschränkt man sich auf die „obere“ Halbschale, erhält man

$$H^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle_{n,1} = -1, x_{n+1} > 0 \right\} \subset F^n.$$

Das konforme Kugelmodell

Es sei

$$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$$

die euklidische Einheitskugel. Die stereographische Projektion

$$\begin{aligned} \zeta : H^n &\rightarrow B^n \\ x &\mapsto \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

bildet H^n diffeomorph und konform ab auf B^n . Die Umkehrabbildung von ζ lautet

$$\zeta^{-1}(y) = \left(\frac{2y_1}{1 - |y|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 - |y|^2}, \frac{1 + |y|^2}{1 - |y|^2} \right).$$

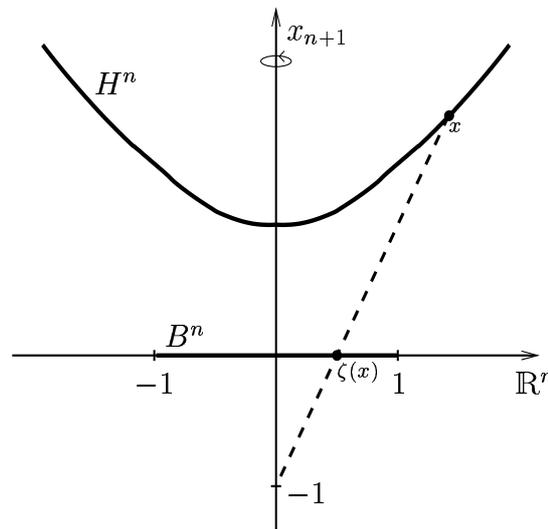


Abbildung 2.3: Stereographische Projektion von H^n auf B^n

Definiert man für $x, y \in B^n$ eine Metrik auf B^n durch

$$d_B(x, y) := d_H(\zeta^{-1}(x), \zeta^{-1}(y)),$$

so sind (B^n, d_B) und (H^n, d_H) isometrisch diffeomorph. Es gilt

$$\begin{aligned} d_B(x, y) &= \operatorname{Arcosh}(-\langle \zeta^{-1}(x), \zeta^{-1}(y) \rangle_{n,1}) \\ &= \operatorname{Arcosh} \left(1 + \frac{2|x - y|^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)} \right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Den metrischen Raum (B^n, d_B) nennt man das konforme Kugelmodell des n-dimensionalen hyperbolischen Raums \mathbb{H}^n .

Das Halbebenenmodell

Es sei

$$U^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$$

die obere Halbebene des \mathbb{R}^n .

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \eta : B^n &\rightarrow U^n \\ x &\mapsto 2 \frac{x + e_n}{|x + e_n|^2} - e_n \end{aligned}$$

wobei $e_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$, bildet B^n diffeomorph ab auf U^n .

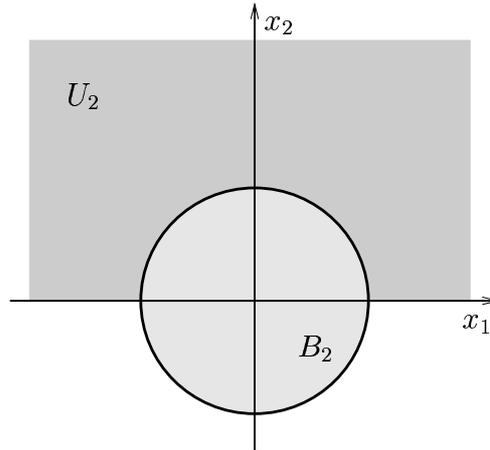


Abbildung 2.4: B_2 und U_2

Definiert man für $x, y \in U^n$ eine Metrik auf U^n durch

$$d_U(x, y) := d_B(\eta^{-1}(x), \eta^{-1}(y)),$$

so sind (U^n, d_U) und (B^n, d_B) isometrisch diffeomorph. Es gilt

$$d_U(x, y) = \operatorname{Arcosh} \left(1 + \frac{|x - y|^2}{2x_n y_n} \right). \quad (2.2)$$

Den metrischen Raum (U^n, d_U) nennt man das Halbebenenmodell des n -dimensionalen hyperbolischen Raums \mathbb{H}^n .

2.2 Das konforme Kugelmodell im speziellen

Im folgenden werden wir das konforme Kugelmodell des hyperbolischen Raums \mathbb{H}^n benutzen.

Um konkrete Rechnungen durchzuführen, wählen wir euklidische Koordinaten. Dann hat der metrische Tensor¹ die Form

$$\begin{aligned} (g_{ij}(x))_{i,j=1\dots n} &= (\rho^2(x) \delta_{ij})_{i,j=1\dots n} \\ &= \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3)$$

wobei

$$\begin{aligned} \rho : B_1(0) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2}{1 - |x|^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

eine Funktion auf $B^n = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ ist. Die Komponenten der zum metrischen Tensor (g_{ij}) inversen Matrix bezeichnen wir mit g^{ij} .

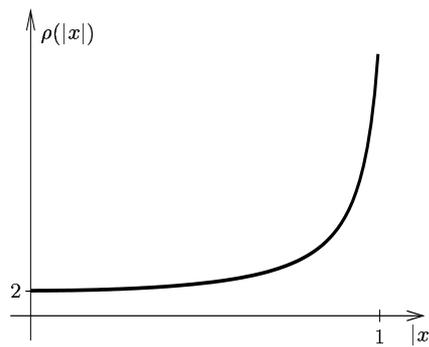


Abbildung 2.5: Die Funktion $\rho(|x|)$

Bezeichnet man mit dx das euklidische Volumenelement und mit $|dx| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (dx^i)^2}$ das euklidische Linienelement, so läßt sich das hyperbolische Linienelement unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention darstellen durch

$$(ds)^2 = g_{ij} dx^i dx^j = \rho^2(x) |dx|^2. \quad (2.5)$$

Das hyperbolisches Volumenelement lautet

$$dV = \sqrt{g} dx = \rho^n(x) dx \quad (2.6)$$

mit $g = \det(g_{ij})$.

¹ Für die Definitionen der in diesem Abschnitt gebrauchten Begriffe aus der Differentialgeometrie und der Riemannschen Geometrie, sowie für weitere Details sei zum Beispiel auf [Aub], [Jo] verwiesen.

Für das Dirichlet-Integral und den Laplace-Beltrami-Operator ergibt sich

$$\int_{D'} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 dV = \int_D g^{ij} u_{x^i} u_{x^j} \rho^n dx = \int_D |\nabla u|^2 \rho^{n-2} dx \quad (2.7)$$

beziehungsweise

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} u = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \right) = \rho^{-n} \nabla(\rho^{n-2} \nabla u). \quad (2.8)$$

Hierbei ist $D' \subset \mathbb{H}^n$ und $D \subset B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ das entsprechende Gebiet in euklidischen Koordinaten².

Isometrien auf B^n

Eine Isometrie auf B^n ist eine Abbildung $T : B^n \rightarrow B^n$ mit der Eigenschaft

$$d_B(x_1, x_2) = d_B(T(x_1), T(x_2))$$

für alle $x_1, x_2 \in B^n$, daß heißt T ist längenerhaltend bezüglich der hyperbolischen Metrik.

Für jedes $y \in B^n$ kann man eine Isometrie konstruieren, die den Punkt y auf den Punkt 0 abbildet:

Es sei $y \in B^n$ beliebig, aber fest gewählt. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} T_y : B^n &\rightarrow B^n \\ x &\mapsto \frac{(1 - |y|^2)(x - y) - |x - y|^2 y}{1 + |x|^2 |y|^2 - 2x \cdot y} \end{aligned} \quad (2.9)$$

eine Isometrie auf B^n (vergl. [Ra, § 4.5]), daß heißt es gilt

$$d_B(x_1, x_2) = d_B(T_y(x_1), T_y(x_2)) \quad (2.10)$$

für alle $x_1, x_2 \in B^n$. Außerdem ist $T_y(y) = 0$.

T_y erfüllt die folgenden Identitäten (vergl. [BBF]), die in späteren Kapiteln gebraucht werden. Es gilt

$$|T_y(x)|^2 = \frac{|x - y|^2}{1 + |x|^2 |y|^2 - 2x \cdot y} \quad (2.11)$$

² Die Menge D entspricht der Menge D' , die unterschiedliche Bezeichnung soll nur verdeutlichen, daß explizite Koordinaten gewählt worden sind.

sowie

$$(T'_y(x))^t \cdot (T'_y(x)) = \left(\frac{1 - |y|^2}{1 + |x|^2|y|^2 - 2x \cdot y} \right)^2 E \quad (2.12)$$

und

$$|\det T'_y(x)| = \left(\frac{1 - |y|^2}{1 + |x|^2|y|^2 - 2x \cdot y} \right)^n. \quad (2.13)$$

Dabei bezeichnet E die n -dimensionale Einheitsmatrix.

Insbesondere kann man die Isometrie T_y , die auch als „hyperbolische Translation“ bezeichnet wird, dazu benutzen, ein Gebiet $D' \subset B^n$ mit $y \in D'$ isometrisch auf ein Gebiet $\tilde{D}' \subset B^n$ mit $0 \in \tilde{D}'$ abzubilden.

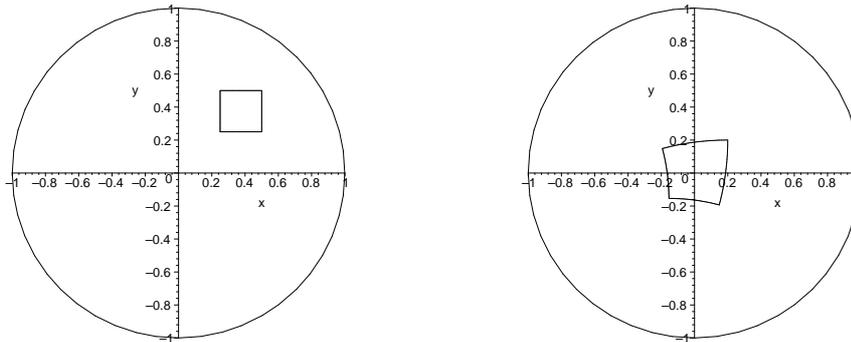


Abbildung 2.6: Ein Gebiet $D' \subset B^2$ und seine hyperbolische Translation $T_{(\frac{3}{8}, \frac{3}{8})}(D')$

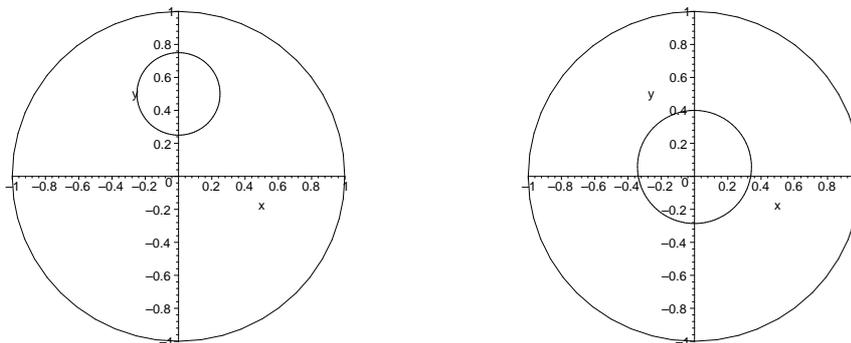


Abbildung 2.7: Ein Gebiet $D' \subset B^2$ und seine hyperbolische Translation $T_{(0, \frac{1}{2})}(D')$

Geodätische Kugeln

Eine offene, geodätische Kugel mit Mittelpunkt $x \in B^n$ und Radius $\theta \in (0, \infty)$ ist definiert als die Menge

$$\mathfrak{B}_\theta(x) := \{y \in B^n \mid d_B(x, y) < \theta\}. \quad (2.14)$$

Diese entspricht einer euklidischen Kugel $B_R(\tilde{x})$ für ein $\tilde{x} \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ und ein geeignetes $R \in (0, 1)$. Genauer ist eine Teilmenge $S \subset B^n$ genau dann eine geodätische Kugel in B^n , wenn $S \subset \mathbb{R}^n$ eine euklidische Kugel ist, die ganz in $B_1(0)$ liegt (vergl. [Ra, § 4.5]).

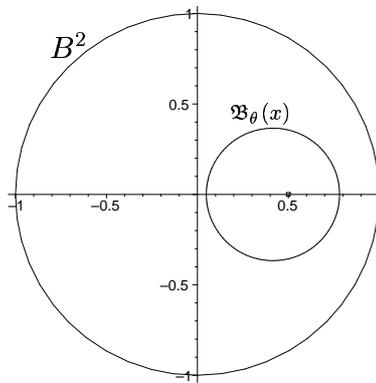


Abbildung 2.8: Die geodätische Kugel $\mathfrak{B}_\theta(x) \subset B^2$ für $x = (\frac{1}{2}, 0)$ und $\theta = 1$

Wir betrachten den Spezialfall einer geodätischen Kugel mit Mittelpunkt 0. Für den hyperbolischen Abstand eines Punktes $y \in B^n$ vom Punkt $x = 0$ gilt (vergl. Formel (2.1))

$$\begin{aligned} d_B(0, y) &= \operatorname{Arcosh} \left(1 + \frac{2|y|^2}{(1 - |y|^2)} \right) \\ &= \operatorname{Arcosh} \frac{(1 + |y|^2)}{(1 - |y|^2)} \\ &= 2 \operatorname{Artanh} |y|. \end{aligned}$$

Daraus folgt für eine geodätische Kugel mit Mittelpunkt in $x = 0$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_\theta(0) &= \{y \in B^n \mid d_B(0, y) < \theta\} \\ &= \{y \in B^n \mid 2 \operatorname{Artanh} |y| < \theta\} \\ &= \left\{ y \in B^n \mid |y| < \tanh \frac{\theta}{2} \right\} \\ &= B_R(0) \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

wobei $R := \tanh \frac{\theta}{2} \in (0, 1)$.

Eine geodätische Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius $\theta \in (0, \infty)$ im konformen Kugelmodell des \mathbb{H}^n entspricht also der euklidischen Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius $R = \tanh \frac{\theta}{2} \in (0, 1)$.

Die hyperbolische Translation (vergl. Formel (2.9) auf Seite 10) bildet Kugeln auf Kugeln ab:

Lemma 2.1 *Es sei $D' = \mathfrak{B}_\theta(x) \subset \mathbb{H}^n$ eine geodätische Kugel mit Mittelpunkt x und Radius $\theta \in (0, \infty)$. Es sei $\tilde{D}' := T_x(D')$ die hyperbolische Translation von D' bezüglich x . Dann ist \tilde{D}' eine geodätische Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius θ .*

Beweis: Nach Definition ist $D' = \{y \in B^n \mid d_B(x, y) < \theta\}$. Da T_x eine Isometrie auf B^n ist, gilt

$$\begin{aligned} \tilde{D}' &= \{T_x(y) \in B^n \mid d_B(x, y) < \theta\} \\ &= \{T_x(y) \in B^n \mid d_B(T_x(x), T_x(y)) < \theta\} \\ &= \{z \in B^n \mid d_B(0, z) < \theta\} \\ &= \mathfrak{B}_\theta(0). \end{aligned}$$

□

Sternförmige Mengen

Definition 1 Eine Menge $D' \subset \mathbb{H}^n$ heißt sternförmig bezüglich $x_0 \in D'$, wenn für alle $x \in D'$ die Geodäte zwischen x_0 und x ganz in D' liegt.

Bemerkung 2.2 Diese Definition verallgemeinert die Definition von sternförmigen Mengen im \mathbb{R}^n . Dort wird gefordert, daß die Verbindungsstrecke zwischen dem Sternzentrum und einem Punkt x ganz im Gebiet liegt.

Bemerkung 2.3 Die Geodäten im konformen Kugelmodell entsprechen „Durchmessern“ von B^n und „Kreisbögen orthogonal zum Rand“ (vergl. Abbildung 2.9). Zu je zwei Punkten gibt es genau eine Geodäte, die kürzeste Verbindung zwischen diesen zwei Punkten.

Die hyperbolische Translation (vergl. Formel (2.9)) eines Gebietes D' erhält die Sternförmigkeit:

Lemma 2.2 *Es sei $D' \subset \mathbb{H}^n$ sternförmig bezüglich $x_0 \in D'$ und $\tilde{D}' := T_{x_0}(D')$ die hyperbolische Translation von D' bezüglich x_0 . Dann ist \tilde{D}' sternförmig bezüglich 0.*

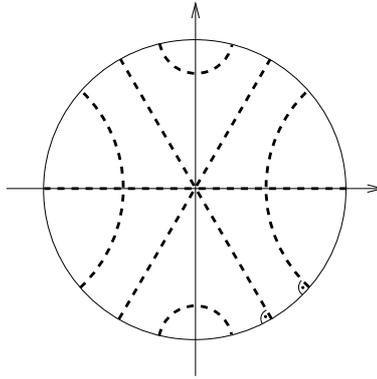


Abbildung 2.9: Geodäten im konformen Kugelmodell

Beweis: Es sei $x \in D'$ beliebig. Da D' sternförmig ist, liegt die Geodäte zwischen x_0 und x ganz in D' .

Eine Isometrie bildet Geodäten wieder auf Geodäten ab. Somit wird die Geodäte zwischen x_0 und x durch die Isometrie T_{x_0} auf eine Geodäte zwischen $T_{x_0}(x_0) = 0$ und $T_{x_0}(x)$ in \tilde{D}' abgebildet. Mit der Beliebigkeit von x folgt, daß \tilde{D}' sternförmig bezüglich 0 ist. □

Bemerkung 2.4 Die hyperbolische Translation erhält neben der Sternförmigkeit auch die Randregularität einer Menge.

Ist zum Beispiel der Rand der Menge D' lokal der Graph einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion ϕ , so ist der Rand der Menge \tilde{D}' lokal der Graph der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $\tilde{\phi} = T_y \circ \phi$.

3 Symmetrisierung und harmonische Verpflanzung

Die folgenden Abschnitte führen sowohl in die Methode der Symmetrisierung von Funktionen als auch in die Methode der harmonischen Verpflanzung von Funktionen im hyperbolischen Raum ein. Beide Methoden ermöglichen Abschätzungen von Variationsfunktionalen durch Konstruktion geeigneter Testfunktionen.

3.1 Symmetrisierung im \mathbb{H}^n

Die Methode der Symmetrisierung von Funktionen ermöglicht die Berechnung unterer Schranken von Variationsfunktionalen. Grundlegende Idee ist, daß man eine Funktion u durch Neuordnung ihrer Niveaumengen so in eine symmetrische Funktion $u^\#$ umordnen kann, daß wesentliche Eigenschaften der ursprünglichen Funktion erhalten bleiben. Für Funktionen im \mathbb{R}^n wird die Methode zum Beispiel beschrieben in [PS] oder [B1]. Eine Verallgemeinerung für Funktionen in Räumen konstanter skalarer Krümmung findet sich bei Baernstein [Bae]:

Es sei (X, μ) ein Maßraum und $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion. Die durch

$$\begin{aligned} \beta_u : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \cup \{0\} \\ t &\longmapsto \mu(\{x \in X \mid u(x) > t\}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

definierte Verteilungsfunktion mißt das Volumen der Niveaumengen von u .

Definition 2 Falls $\beta_u(t) < \infty$ für alle $t > \text{ess inf } u$ so wird die monoton fallende Umordnung¹ u^* von u für $s \in (0, \mu(X))$ definiert durch

$$u^*(s) = \inf \{t \in \mathbb{R} \mid \beta_u(t) \leq s\}. \tag{3.2}$$

Bemerkung 3.1 Die Funktion u^* existiert und ist beschränkt in $(0, \mu(X))$, da die Niveaumengen von u (für $t > \text{ess inf } u$) endliches Maß haben. Nach Konstruktion ist u^* monoton fallend in s und die Niveaumengen von u und u^* sind gleichmeßbar, es gilt $\beta_u(t) = \beta_{u^*}(t)$ für alle t .

¹ Stichwort „monotone decreasing rearrangement“

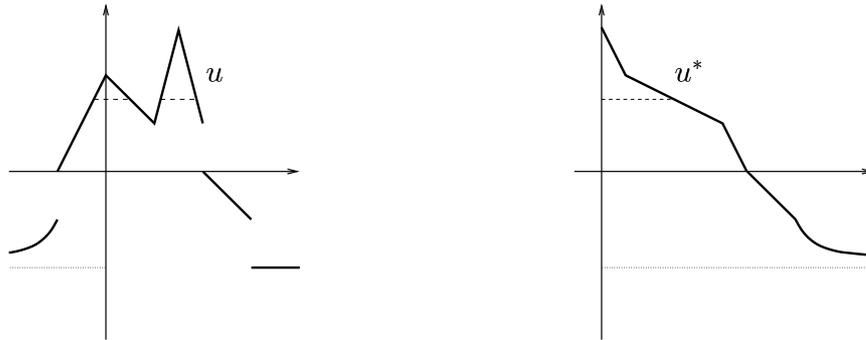


Abbildung 3.1: Eine Funktion u und ihre monoton fallende Umordnung u^*

Wir wählen $X = \mathbb{H}^n$ und als Modell für \mathbb{H}^n das konforme Kugelmodell. Die Abstandsfunktion auf $B_1(0)$ ist dann gegeben durch

$$d_B(x, y) = \operatorname{Arcosh} \left(1 + \frac{2|x - y|^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)} \right)$$

und das Volumenelement durch $dV = \rho^n(x) dx$ (vergl. Abschnitt 2.2).

Für eine meßbare Menge $D' \subset \mathbb{H}^n$ mit Volumen $\mu(D') = \int_{D'} dV = \int_D \rho^n(x) dx$ sei

$$D^\# := \mathfrak{B}_\theta(0) = \{x \in B_1(0) \mid d_B(0, x) < \theta\} \quad (3.3)$$

die geodätische Kugel um 0 mit Radius $\theta \in (0, \infty]$ mit demselben Volumen wie D' .

Definition 3 Für eine meßbare Funktion $u : D' \rightarrow \mathbb{R}$ wird durch

$$\begin{aligned} u^\# : D^\# &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto u^* \left(\mu \left(\mathfrak{B}_{d_B(0,x)}(0) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

die symmetrische, monoton fallende Umordnung² $u^\#$ der Funktion u definiert.

Bemerkung 3.2 Die Funktion $u^\#$ hat die folgenden Eigenschaften:

1. $u^\#$ ist radialsymmetrisch: $u^\#(x_1) = u^\#(x_2)$ falls $d_B(0, x_1) = d_B(0, x_2)$.
2. $u^\#$ ist monoton fallend: $u^\#(x_1) \geq u^\#(x_2)$ falls $d_B(0, x_1) \leq d_B(0, x_2)$.
3. u und $u^\#$ sind gleichmeßbar: $\beta_u(t) = \beta_{u^\#}(t)$ für alle t .
4. Falls u lipschitzstetig ist, so ist auch $u^\#$ lipschitzstetig, und damit fast überall differenzierbar.

² Stichwort „symmetric decreasing rearrangement“, „Schwarz symmetrisation“

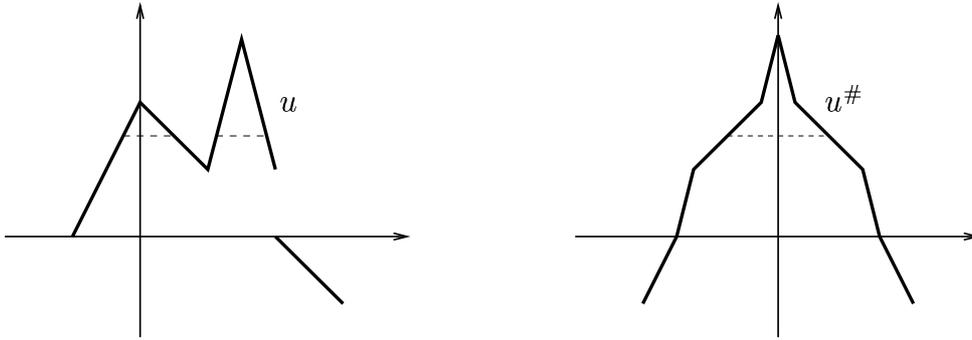


Abbildung 3.2: Eine Funktion u und ihre symmetrische, monoton fallende Umordnung $u^\#$

Die Symmetrisierung einer Funktion verringert den Wert des Dirichletintegrals und erhält den Wert der L^q -Norm:

Lemma 3.1 (nach [Bae]) *Es sei $D' \subset \mathbb{H}^n$ offen und beschränkt und $u : D' \rightarrow \mathbb{R}$ eine lipschitzstetige Funktion mit $u \geq 0$ in D' , $u = 0$ auf $\partial D'$. Dann gilt:*

(i) *Der Wert des Dirichletintegrals verringert sich:*

$$\int_{D'} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u(x)|^2 dV \geq \int_{D^\#} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u^\#(x)|^2 dV \quad (3.5)$$

(ii) *Für $q \in (1, \infty]$ gilt*

$$\int_{D'} |u(x)|^q dV = \int_{D^\#} |u^\#(x)|^q dV. \quad (3.6)$$

Der Beweis von Punkt (ii) des Satzes folgt aus der Gleichmeßbarkeit der Funktionen u und $u^\#$. Für Punkt (i) sei auf [Bae, S.61] verwiesen.

Bemerkung 3.3 In der Literatur findet man häufig auch

$$u^\#(x) = \sup \{ t \in \mathbb{R} \mid x \in \{\tilde{x} \in D' \mid u(\tilde{x}) > t\}^\# \}$$

als Definition für die symmetrische, monoton fallende Umordnung $u^\#$ einer Funktion u . Diese ist (für genügend glatte Funktionen) zur oben gegebenen Definition äquivalent.

3.2 Harmonische Verpflanzung im \mathbb{H}^n

Die Methode der harmonischen Verpflanzung von Funktionen ermöglicht die Berechnung oberer Schranken von Variationsfunktionalen.

Es sei $D' \subset \mathbb{H}^n$, $n \geq 3$ offen und beschränkt und D die entsprechende Menge im konformen Kugelmodell des hyperbolischen Raumes in euklidischen Koordinaten.

Die Greensche Funktion $G_D(x, y)$ des Laplace-Beltrami-Operators in D unter Dirichletschen Randbedingungen ist Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\nabla(\rho^{n-2}(x) \nabla G_D(x, y)) &= \delta_y(x) && \text{in } D \\ G_D(x, y) &= 0 && \text{auf } \partial D \end{aligned} \quad (3.7)$$

für jedes $y \in D$.

Wie im euklidischen Fall ist die Greensche Funktion $G_D(x, y)$ positiv für alle x, y in D , symmetrisch in x und y und kann in einen singulären und einen regulären Anteil aufgespalten werden. Es gilt

$$G_D(x, y) = \gamma(F(x, y) - H(x, y)), \quad (3.8)$$

wobei $\gamma = \frac{\Gamma(n/2)}{2(n-2)\pi^{n/2}}$. Der singuläre Anteil hat die Form

$$F(x, y) = F\left(\frac{|x-y|}{1+|x|^2|y|^2-2x \cdot y}\right)$$

mit

$$F(r) = (n-2) \int_r^1 \rho^{2-n}(s) s^{1-n} ds, \quad r \in (0, 1). \quad (3.9)$$

Die Funktion $F(r)$ ist eine radialsymmetrische Fundamentallösung der Laplace-Beltrami-Gleichung $-\Delta_{\mathbb{H}^n} u = \delta_0$ in \mathbb{H}^n .

Der reguläre Anteil $H(x, y)$ ist Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\nabla(\rho^{n-2}(x) \nabla H(x, y)) &= 0 && \text{in } D \\ H(x, y) &= F(x, y) && \text{auf } \partial D. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Greenschen Funktion wird der harmonische Radius der Menge D im Punkt $y \in D$ definiert:

Definition 4 (Harmonischer Radius) Der harmonische Radius $r(y)$ der Menge D im Punkt $y \in D$ ist die Lösung der Gleichung

$$F(r(y)) = H(y, y)$$

mit F und H wie oben.

Er hat die folgenden Eigenschaften (nach [BBF]):

1. $r(y)$ ist positiv in D .
2. $r(y) = 0$ für $y \in \partial D$.
3. Falls D beschränkt ist, nimmt $r(y)$ sein Maximum auf D an.
4. Für zwei Mengen D_1 und D_2 mit $D_1 \subset D_2$ gilt: $r_1(y) \leq r_2(y)$ in D_1 .
5. Auf Kugeln stimmen der Radius der Kugel und der harmonische Radius bezüglich des Zentrums der Kugel überein.

Beispiele von Mengen und ihren zugehörigen harmonischen Radien werden für einige spezielle Gebiete im \mathbb{R}^n in [BF, S.194] gegeben.

Definition 5 (Harmonisches Zentrum, [BF]) Ein Punkt $y \in D$, in dem der harmonische Radius sein Maximum auf D annimmt, heißt harmonisches Zentrum von D .

Definition 6 (Harmonische Verpflanzung) Es sei $y \in D$ beliebig, aber fest gewählt. Es sei $\mathfrak{B}_\theta(0) \subset \mathbb{H}^n$ eine geodätische Kugel und $B_R = B_R(0) \subset B_1(0)$ die entsprechende Menge in euklidischen Koordinaten.

Für eine radialsymmetrische Funktion $u = \mu \circ G_{B_R}(\cdot, 0) : B_R \rightarrow \mathbb{R}_+$ wird die harmonische Verpflanzung U von u nach D definiert durch

$$U = \mu \circ G_D(\cdot, y) : D \longrightarrow \mathbb{R}_+. \quad (3.10)$$

Die Funktion u und ihre harmonische Verpflanzung U erfüllen die folgenden Integral(un)gleichungen:

Lemma 3.2 (Bandle, Brillard, Flucher, [BBF]) Mit den Bezeichnungen aus Definition 6 gilt für die verpflanzte Funktion U :

(i) Der Wert des Dirichlet-Integrals bleibt erhalten:

$$\int_D |\nabla U(x)|^2 \rho^{n-2} dx = \int_{B_R} |\nabla u(x)|^2 \rho^{n-2} dx \quad (3.11)$$

(ii) Wählt man speziell $\theta = 2 \operatorname{Artanh}(r(y))$, wobei $r(y)$ der harmonische Radius von D in y ist, so gilt $R = r(y)$. Für jede Funktion $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ für die $\Phi \circ \mu$ monoton wachsend und $\Phi \circ U$ integrierbar ist, gilt dann

$$\int_D \Phi(U(x)) \rho^n dx \geq \int_{B_{r(y)}} \Phi(u(x)) \rho^n dx. \quad (3.12)$$

3 Symmetrisierung und harmonische Verpflanzung

Für den Beweis des Lemmas 3.2 und genauere Ausführungen zur Methode der harmonischen Verpflanzung wird auf [BBF] und die darin angeführten Referenzen verwiesen.

Bemerkung 3.4 In (3.12) gilt Gleichheit genau dann, wenn D eine Kugel mit Mittelpunkt 0 ist und $y = 0$ gewählt wird.

4 Eigenwerte des Laplace-Beltrami-Operators $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$

In der Diskussion über die Existenz von Lösungen des Brézis-Nirenberg Problems spielt der erste Dirichlet-Eigenwert λ_1 des Laplace-Beltrami-Operators $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$ eine wichtige Rolle. Deshalb werden in diesem Kapitel Eigenschaften desselben zusammengetragen.

Definition 7 Sei $D' \subset \mathbb{H}^n$, $n \in \mathbb{N}$ offen und beschränkt. $\lambda \in \mathbb{R}$ ist ein Eigenwert des Laplace-Beltrami-Operators $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$ unter Dirichletschen Randbedingungen, falls eine nichttriviale Lösung $u \in H_0^{1,2}(D')$ des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta_{\mathbb{H}^n} u &= \lambda u && \text{in } D' \\ u &= 0 && \text{auf } \partial D'. \end{aligned} \quad (4.1)$$

existiert. Die Funktion u heißt eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ .

Bemerkung 4.1 Hierbei bezeichnet $H_0^{1,2}(D')$ die Vervollständigung von $C_0^\infty(D')$ bezüglich der Norm $\|u\|_{1,2,\rho} = (\int_{D'} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 dV)^{1/2} = (\int_D |\nabla u|^2 \rho^{n-2} dx)^{1/2}$.

Die Menge der Eigenwerte ist abzählbar, es gilt $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$, und die Eigenwerte häufen sich im Unendlichen. Der erste Eigenwert λ_1 ist einfach und läßt sich charakterisieren als Lösung des Variationsproblems

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^{1,2}(D') \\ u \neq 0}} \frac{\int_{D'} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 dV}{\int_{D'} |u|^2 dV}. \quad (4.2)$$

Aus (4.2) und der Regularität von Lösungen des Randwertproblems (4.1) folgt die Positivität der ersten Eigenfunktion u_1 zum Eigenwert λ_1 (nach [CH1]).

Im folgenden wird für die Berechnung des ersten Eigenwerts das Kugelmodell des hyperbolischen Raums verwendet. Mengen im \mathbb{H}^n werden im allgemeinen mit D' , nach Übergang zu euklidischen Koordinaten aber mit D bezeichnet.

Außerdem sei der Rand von D so glatt, daß u_1 in \overline{D} zumindest lipschitzstetig ist (zum Beispiel $\partial D \in C^2$).

4.1 Der erste Eigenwert auf beschränkten Mengen $D' \subsetneq \mathbb{H}^n$

Es sei λ_1 der erste Dirichlet-Eigenwert des Laplace-Beltrami-Operators $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$ auf D' .

4.1.1 Abschätzungen des Eigenwerts λ_1 für $n \geq 3$

Zunächst zeigen wir eine Abschätzung des ersten Eigenwerts λ_1 nach unten. Dazu wird unter anderem die in Abschnitt 3.1 eingeführte Methode der Symmetrisierung von Funktionen benötigt.

Lemma 4.1 *Es sei $D' \subset \mathbb{H}^n$, $n \geq 3$ offen und beschränkt und $D^\# = \mathfrak{B}_\theta(0)$ die geodätische Kugel um 0 mit Radius $\theta \in (0, \infty)$ mit demselben Volumen wie D' . Dann gilt*

$$\lambda_1 \geq \frac{n(n-2)}{4} + \frac{(1-R_\theta^2)^2}{4} \cdot \inf_{\substack{v \in H_0^{1,2}(B_1(0)) \\ v \neq 0}} \frac{\int_{B_1(0)} |\nabla v|^2 dx}{\int_{B_1(0)} |v|^2 dx} \quad (4.3)$$

wobei $R_\theta := \tanh \frac{\theta}{2}$.

Beweis: Es sei u_1 eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1 und $u_1^\#$ die symmetrische, monoton fallende Umordnung von u_1 . Mit dem zum Eigenwertproblem (4.1) zugehörigen Variationsproblem (4.2) folgt

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^{1,2}(D') \\ u \neq 0}} \frac{\int_{D'} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 dV}{\int_{D'} |u|^2 dV} = \frac{\int_{D'} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u_1|^2 dV}{\int_{D'} |u_1|^2 dV}.$$

Durch die Symmetrisierung von u_1 wird der Quotient und damit λ_1 nach unten abgeschätzt. Es ergibt sich mit Lemma 3.1

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\geq \frac{\int_{D^\#} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u_1^\#|^2 dV}{\int_{D^\#} |u_1^\#|^2 dV} \\ &\geq \inf_{\substack{u \in H_0^{1,2}(D^\#) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{D^\#} |\nabla_{\mathbb{H}^n} u|^2 dV}{\int_{D^\#} |u|^2 dV} \\ &= \inf_{\substack{u \in H_0^{1,2}(B_{R_\theta}) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{B_{R_\theta}} |\nabla u|^2 \rho^{n-2} dx}{\int_{B_{R_\theta}} |u|^2 \rho^n dx} \end{aligned}$$

mit $\rho(x) = \frac{2}{1-|x|^2}$. Wir setzen $v := \rho^{\frac{n-2}{2}} u$. Dann ist $v \in H_0^{1,2}(B_{R_\theta})$ und wir können schreiben¹

$$\lambda_1 \geq \inf_{\substack{u \in H_0^{1,2}(B_{R_\theta}) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{B_{R_\theta}} |\nabla u|^2 \rho^{n-2} dx}{\int_{B_{R_\theta}} |u|^2 \rho^n dx}$$

¹ Für die ausführliche Berechnung des Gradiententerms sei auf Anhang A.1 verwiesen.

$$\begin{aligned}
 &= \inf_{\substack{v \in H_0^{1,2}(B_{R_\theta}) \\ v \neq 0}} \frac{\int_{B_{R_\theta}} |\nabla v|^2 dx + \frac{n(n-2)}{4} \int_{B_{R_\theta}} |v|^2 \rho^2 dx}{\int_{B_{R_\theta}} |v|^2 \rho^2 dx} \\
 &= \frac{n(n-2)}{4} + \inf_{\substack{v \in H_0^{1,2}(B_{R_\theta}) \\ v \neq 0}} \frac{\int_{B_{R_\theta}} |\nabla v|^2 dx}{\int_{B_{R_\theta}} |v|^2 \rho^2 dx}.
 \end{aligned}$$

In $B_{R_\theta} \subset B_1(0)$ gilt $2 \leq \rho(x) < \frac{2}{1-R_\theta^2}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &> \frac{n(n-2)}{4} + \frac{(1-R_\theta^2)^2}{4} \cdot \inf_{\substack{v \in H_0^{1,2}(B_{R_\theta}) \\ v \neq 0}} \frac{\int_{B_{R_\theta}} |\nabla v|^2 dx}{\int_{B_{R_\theta}} |v|^2 dx} \\
 &\geq \frac{n(n-2)}{4} + \frac{(1-R_\theta^2)^2}{4} \cdot \inf_{\substack{v \in H_0^{1,2}(B_1(0)) \\ v \neq 0}} \frac{\int_{B_1(0)} |\nabla v|^2 dx}{\int_{B_1(0)} |v|^2 dx}
 \end{aligned}$$

und das Lemma ist bewiesen. □

Bemerkung 4.2 Das Infimum des Quotienten in der Abschätzung aus Lemma 4.1 entspricht dem ersten Dirichlet-Eigenwert Λ_1 des Laplace-Operators $-\Delta$ auf $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Für diesen lassen sich explizite Werte angeben, die im Anhang A.2 zum Teil berechnet werden.

Bemerkung 4.3 Die untere Schranke für λ_1 aus Lemma 4.1 wird im folgenden mit $\lambda_1^u(R_\theta)$ bezeichnet.

Satz 1 (Abschätzung des ersten Eigenwerts nach unten)

Unter den Voraussetzungen des Lemmas 4.1 gilt für die dort hergeleitete, gebietsabhängige untere Schranke

$$\frac{n(n-2)}{4} + \frac{(1-R_\theta^2)^2}{4} \cdot \Lambda_1 =: \lambda_1^u(R_\theta)$$

des Eigenwerts λ_1 :

- (i) $\lambda_1^u(R_\theta)$ ist streng monoton fallend für $R_\theta \in (0, 1)$.
- (ii) Für $R_\theta \rightarrow 0$ gilt $\lambda_1^u(R_\theta) \rightarrow \frac{n(n-2)}{4} + \frac{\Lambda_1}{4}$.
- (iii) Für $R_\theta \rightarrow 1$ gilt $\lambda_1^u(R_\theta) \rightarrow \frac{n(n-2)}{4}$.

Beweis: Die untere Schranke, aufgefaßt als Funktion von R_θ , ist offensichtlich stetig differenzierbar in $(0, 1)$. Es gilt

$$(\lambda_1^u)'(R_\theta) = -R_\theta(1 - R_\theta^2) \Lambda_1 < 0 \quad \text{in } (0, 1),$$

da Λ_1 stets positiv ist. Somit ist Behauptung (i) gezeigt. Punkt (ii) und (iii) folgen sofort durch Bildung des entsprechenden Grenzwerts. \square

Die Berechnung einer oberen Schranke für λ_1 nutzt die Methode der harmonischen Verpflanzung (vergl. Abschnitt 3.2).

Lemma 4.2 *Sei $D' \subset \mathbb{H}^n$, $n \geq 3$ offen und beschränkt. Sei $y \in D$ ein harmonisches Zentrum von D und $R_h := r(y)$ der zugehörige harmonische Radius. Dann gilt*

$$\lambda_1 \leq \lambda_1(B_{R_h}).$$

Hierbei bezeichnet $\lambda_1(B_{R_h})$ den ersten Dirichlet-Eigenwert des Laplace-Beltrami-Operators auf $\mathfrak{B}_{(2 \operatorname{Artanh} R_h)}(0) = B_{R_h}(0)$.

Beweis: Wir setzen $\theta := 2 \operatorname{Artanh} R_h$ und betrachten das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta_{\mathbb{H}^n} u &= \lambda u && \text{in } \mathfrak{B}_\theta(0) \\ u &= 0 && \text{auf } \partial \mathfrak{B}_\theta(0), \end{aligned} \tag{4.4}$$

Eine erste Eigenfunktion u_1 ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit positiv in $\mathfrak{B}_\theta(0)$. Da der erste Eigenwert einfach und $\mathfrak{B}_\theta(0)$ radialsymmetrisch ist, folgt mit einem Symmetrisierungsargument, daß u_1 radialsymmetrisch und außerdem monoton fallend sein muß.

Die radialsymmetrische Funktion u_1 hat eine Darstellung

$$u_1 = \mu \circ G_{B_{R_h}}(\cdot, 0) : B_{R_h} \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

wobei $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ monoton wachsend in \mathbb{R}_+ ist².

Für die harmonische Verpflanzung $U_1 := \mu \circ G_D(\cdot, y)$ von u_1 nach D mit Zentrum $y \in D$ (vergl. Definition 6) gilt dann nach Lemma 3.2

$$\int_D |\nabla U_1|^2 \rho^{n-2} dx = \int_{B_{R_h}} |\nabla u_1|^2 \rho^{n-2} dx \tag{4.5}$$

² Dies folgt aus den Monotonieeigenschaften von u_1 und $G_{B_{R_h}}(\cdot, 0)$.

und

$$\int_D |U_1|^2 \rho^n dx \geq \int_{B_{R_h}} |u_1|^2 \rho^n dx. \quad (4.6)$$

Lemma 3.2 (ii) ist anwendbar, da mit μ und $\Phi(t) := |t|^2$ auch $\Phi \circ \mu$ monoton wachsend in \mathbb{R}_+ ist.

Das Variationsproblem zu (4.4) lautet in euklidischen Koordinaten

$$\begin{aligned} \lambda_1(B_{R_h}) &= \inf_{\substack{u \in H_0^{1,2}(B_{R_h}) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{B_{R_h}} |\nabla u|^2 \rho^{n-2} dx}{\int_{B_{R_h}} |u|^2 \rho^n dx} \\ &= \frac{\int_{B_{R_h}} |\nabla u_1|^2 \rho^{n-2} dx}{\int_{B_{R_h}} |u_1|^2 \rho^n dx}. \end{aligned}$$

Mit den Abschätzungen (4.5) und (4.6) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\int_{B_{R_h}} |\nabla u_1|^2 \rho^{n-2} dx}{\int_{B_{R_h}} |u_1|^2 \rho^n dx} &\geq \frac{\int_D |\nabla U_1|^2 \rho^{n-2} dx}{\int_D |U_1|^2 \rho^n dx} \\ &\geq \inf_{\substack{u \in H_0^{1,2}(D) \\ u \neq 0}} \frac{\int_D |\nabla u|^2 \rho^{n-2} dx}{\int_D |u|^2 \rho^n dx} \\ &= \lambda_1 \end{aligned}$$

Der erste Eigenwert λ_1 von $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$ auf D' kann somit nach oben beschränkt werden durch den ersten Eigenwert auf der Kugel $\mathfrak{B}_{(2 \operatorname{Artanh} R_h)}(0)$, es gilt

$$\lambda_1 \leq \lambda_1(B_{R_h}). \quad (4.7)$$

□

Bemerkung 4.4 In (4.7) gilt Gleichheit, falls D' eine geodätische Kugel mit Mittelpunkt 0 ist. Denn dann ist 0 einziges harmonisches Zentrum von D , es gilt $D = B_{R_h}(0)$, und die Ungleichung (4.6) wird zu einer Gleichung (vergl. Bemerkung 3.4 auf Seite 20).

Lemma 4.3 Sei $D' \subset \mathbb{H}^n$, $n \geq 3$ offen und beschränkt. Sei $y \in D$ ein harmonisches Zentrum von D und $R_h := r(y)$ der zugehörige harmonische Radius. Dann gilt

$$\lambda_1 \leq \frac{n(n-2)}{4} + \frac{I(R_h)}{\int_0^{R_h} I^2(r) r^{1-n} dr} \quad (4.8)$$

wobei $I(r) := \int_0^r t^{n-1} \rho^2(t) dt$.

Beweis: Aus Lemma 4.2 folgt

$$\lambda_1 \leq \lambda_1(B_{R_h}) = \inf_{\substack{u \in H_0^{1,2}(B_{R_h}) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{B_{R_h}} |\nabla u|^2 \rho^{n-2} dx}{\int_{B_{R_h}} |u|^2 \rho^n dx}.$$

Wie im Beweis von Lemma 4.1 setzen wir $v := \rho^{\frac{n-2}{2}} u$ und erhalten durch Einsetzen in den Quotienten

$$\lambda_1 \leq \frac{n(n-2)}{4} + \inf_{\substack{v \in H_0^{1,2}(B_{R_h}) \\ v \neq 0}} \frac{\int_{B_{R_h}} |\nabla v|^2 dx}{\int_{B_{R_h}} |v|^2 \rho^2 dx}. \quad (4.9)$$

Wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist

$$\int_{B_{R_h}} |v| \rho^2 dx = \int_{B_{R_h}} |v \rho \cdot \rho| dx \leq \left(\int_{B_{R_h}} |v \rho|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{B_{R_h}} |\rho|^2 dx \right)^{1/2},$$

woraus folgt

$$\int_{B_{R_h}} |v|^2 \rho^2 dx \geq \left(\int_{B_{R_h}} |v| \rho^2 dx \right)^2 \left(\int_{B_{R_h}} \rho^2 dx \right)^{-1}.$$

Eingesetzt in Gleichung (4.9) ergibt sich als weitere Abschätzung

$$\lambda_1 \leq \frac{n(n-2)}{4} + \left(\int_{B_{R_h}} \rho^2 dx \right) \cdot \inf_{\substack{v \in H_0^{1,2}(B_{R_h}) \\ v \neq 0}} \frac{\int_{B_{R_h}} |\nabla v|^2 dx}{\left(\int_{B_{R_h}} |v| \rho^2 dx \right)^2}. \quad (4.10)$$

Wir fassen den Ausdruck

$$\inf_{\substack{v \in H_0^{1,2}(B_{R_h}) \\ v \neq 0}} \frac{\int_{B_{R_h}} |\nabla v|^2 dx}{\left(\int_{B_{R_h}} |v| \rho^2 dx \right)^2}$$

als Variationsproblem auf. Ein Minimierer desselben ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit positiv in B_{R_h} und löst die Eulersche Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \Delta v + \rho^2 &= 0 & \text{in } B_{R_h} \\ v &= 0 & \text{auf } \partial B_{R_h}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Eine radialsymmetrische Lösung des Randwertproblems (4.11) genügt der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$r^{1-n}(r^{n-1}v')' + \rho^2 = 0 \quad \text{in } (0, R_h) \quad (4.12)$$

mit den Randbedingungen

$$v'(0) = 0 \quad \text{und} \quad v(R_h) = 0. \quad (4.13)$$

Durch zweimalige Integration der Gleichung erhält man eine positive Lösung von (4.12)–(4.13) und somit eine positive, radialsymmetrische Lösung w des Randwertproblems (4.11), nämlich

$$w(x) = \int_{|x|}^{R_h} t^{1-n} \int_0^t \tau^{n-1} \rho^2(\tau) \, d\tau \, dt. \quad (4.14)$$

Diese liegt in $H_0^{1,2}(B_{R_h})$ und genügt der Integralgleichung

$$- \int_{B_{R_h}} |\nabla w|^2 \, dx + \int_{B_{R_h}} w \rho^2 \, dx = 0.$$

Eingesetzt in (4.10) ergibt sich damit für die speziell gewählte Funktion w

$$\lambda_1 \leq \frac{n(n-2)}{4} + \left(\int_{B_{R_h}} \rho^2 \, dx \right) \cdot \frac{1}{\int_{B_{R_h}} w \rho^2 \, dx}.$$

In Polarkoordinaten lautet die obige Ungleichung

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\leq \frac{n(n-2)}{4} + \frac{|\partial B_1(0)| \int_0^{R_h} \rho^2(r) r^{n-1} \, dr}{|\partial B_1(0)| \int_0^{R_h} w \rho^2(r) r^{n-1} \, dr} \\ &= \frac{n(n-2)}{4} + \frac{I(R_h)}{\int_0^{R_h} w I'(r) \, dr} \end{aligned} \quad (4.15)$$

mit $I(r) = \int_0^r t^{n-1} \rho^2(t) \, dt$. Mit Hilfe partieller Integration kann der Nenner des zweiten Summanden weiter umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} \int_0^{R_h} w I'(r) \, dr &= \int_0^{R_h} \int_r^{R_h} t^{1-n} I(t) \, dt \, I'(r) \, dr \\ &= \left[I(r) \int_r^{R_h} t^{1-n} I(t) \, dt \right]_0^{R_h} - \int_0^{R_h} I(r) (-r^{1-n} I(r)) \, dr \\ &= \int_0^{R_h} I^2(r) r^{1-n} \, dr. \end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung. □

Bemerkung 4.5 Die obere Schranke für λ_1 aus Lemma 4.3 wird im folgenden mit $\lambda_1^o(R_h)$ bezeichnet.

Unter den Voraussetzungen des vorigen Lemmas ergibt sich

Satz 2 (Abschätzung des ersten Eigenwerts nach oben)

Sei $I(r) := \int_0^r t^{n-1} \rho^2(t) dt$ und

$$\lambda_1^o(R_h) := \frac{n(n-2)}{4} + \frac{I(R_h)}{\int_0^{R_h} I^2(r) r^{1-n} dr}$$

die in Lemma 4.3 hergeleitete obere Schranke für λ_1 . Dann gilt:

$$\lambda_1^o(R_h) \rightarrow \frac{n(n-2)}{4} + 1 \quad \text{für } R_h \rightarrow 1.$$

Beweis: Um die Behauptung zu zeigen, wenden wir mehrmals die Regel von L'Hospital auf den zweiten Summanden an, erhalten

$$\lim_{R_h \rightarrow 1} \frac{I(R_h)}{\int_0^{R_h} I^2(r) r^{1-n} dr} = 1$$

und schließen

$$\lambda_1^o(R_h) \rightarrow \frac{n(n-2)}{4} + 1 \quad \text{für } R_h \rightarrow 1. \quad \square$$

Bemerkung 4.6 Für $R_h \rightarrow 0$ gilt $\lambda_1^o(R_h) \rightarrow +\infty$.

Bemerkung 4.7 Das Integral $I(r)$ läßt sich als hypergeometrische Reihe [GrR, 3.194 (1)] darstellen. Es gilt

$$I(r) = \int_0^r t^{n-1} \rho^2(t) dt = \frac{4r^n}{n} F\left(2, \frac{n}{2}; 1 + \frac{n}{2}; r^2\right)$$

wobei $F(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot 1} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1) \cdot 1 \cdot 2} z^2 + \dots$

Bemerkung 4.8 Für festes n können wir die Funktion w aus dem Beweis von Lemma 4.3 berechnen. So ist zum Beispiel für $n = 4$

$$w(x) = -\frac{\ln(1 - R_h^2)}{R_h^2} + \frac{\ln(1 - |x|^2)}{|x|^2}$$

und

$$\left(\int_D \rho^2 dx \right) \cdot \frac{1}{\int_D w \rho^2 dx} \leq \frac{R_h^4 + R_h^2(1 - R_h^2) \ln(1 - R_h^2)}{R_h^4 - (1 - R_h^2)(\ln(1 - R_h^2))^2} \xrightarrow{R_h \rightarrow 1} 1.$$

Dies bestätigt das Ergebnis aus Satz 2.

Bemerkung 4.9 Die Größen R_θ und R_h sind gebietsabhängig. Allgemein gilt $R_h \leq R_\theta$, auf geodätischen Kugeln $\mathfrak{B}_\theta(0)$ stimmen R_θ und R_h überein [BBF, Lemma 10].

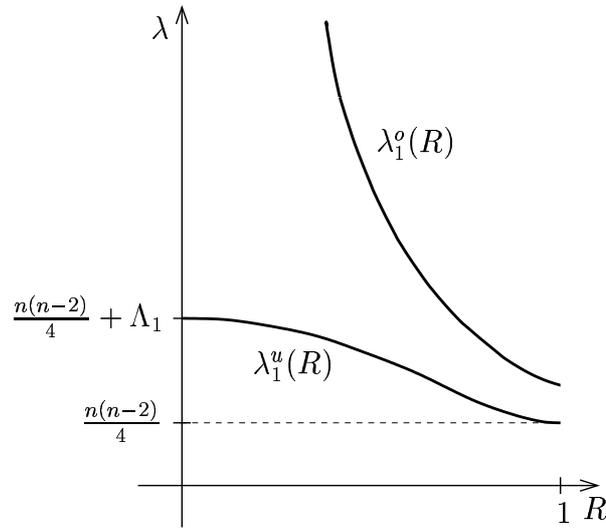


Abbildung 4.1: Schranken für λ_1 in Abhängigkeit von R

4.1.2 Der Eigenwert λ_1 für $n = 3$

Im Fall $n = 3$ können wir den ersten Dirichlet-Eigenwert λ_1 des Laplace-Beltrami-Operators $-\Delta_{\mathbb{H}^3}$ auf geodätischen Kugeln $D' \subset \mathbb{H}^3$ explizit ausrechnen:

Satz 3 (Der erste Eigenwert auf Kugeln im \mathbb{H}^3)

Sei $D' \subset \mathbb{H}^3$ eine geodätische Kugel mit Radius θ um 0 und $R := \tanh \frac{\theta}{2}$. Dann ist

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\pi^2}{4 \operatorname{arctanh}^2 R} = 1 + \frac{\pi^2}{\theta^2}$$

der erste Dirichlet-Eigenwert des Laplace-Beltrami-Operators $-\Delta_{\mathbb{H}^3}$ auf D' und

$$u_1(x) = \frac{\operatorname{Artanh} R}{\pi} \cdot \frac{1 - |x|^2}{|x|} \cdot \sin \left(\frac{\pi \operatorname{Artanh} |x|}{\operatorname{Artanh} R} \right)$$

für $x \in D = B_R(0)$ eine zugehörige erste Eigenfunktion in euklidischen Koordinaten.

Beweis: Das Eigenwertproblem (4.1) lautet in euklidischen Koordinaten

$$\begin{aligned} -\rho^{-3}(x) \nabla (\rho(x) \nabla u) &= \lambda u && \text{in } D = B_R(0) \\ u &= 0 && \text{auf } \partial D. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Da der erste Eigenwert einfach und das Problem rotationsinvariant ist, folgt daß die erste Eigenfunktion radialsymmetrisch sein muß.

Eine radialsymmetrische Lösung $U = U(r)$, $r = |x|$ des Eigenwertproblems (4.16) genügt der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$U'' + \left(r \rho(r) + \frac{2}{r} \right) U' + \lambda \rho^2(r) U = 0 \quad \text{in } (0, R) \quad (4.17)$$

mit der Randbedingung

$$U(R) = 0. \quad (4.18)$$

Außerdem fordern wir

$$\lim_{r \rightarrow 0} U'(r) = 0, \quad (4.19)$$

damit eine stetig differenzierbare Lösung der Gleichung (4.17) zu einer stetig differenzierbaren Lösung des Eigenwertproblems (4.16) auf $B_R(0)$ fortgesetzt werden kann.

Mit Hilfe von Maple findet man für

$$\lambda = 1 + \frac{\pi^2}{4 \operatorname{arctanh}^2 R}$$

eine Lösung des Problems (4.17) – (4.19), nämlich

$$U(r) = \frac{1 - r^2}{r} \cdot \sin \left(\frac{\pi \operatorname{Artanh} r}{\operatorname{Artanh} R} \right).$$

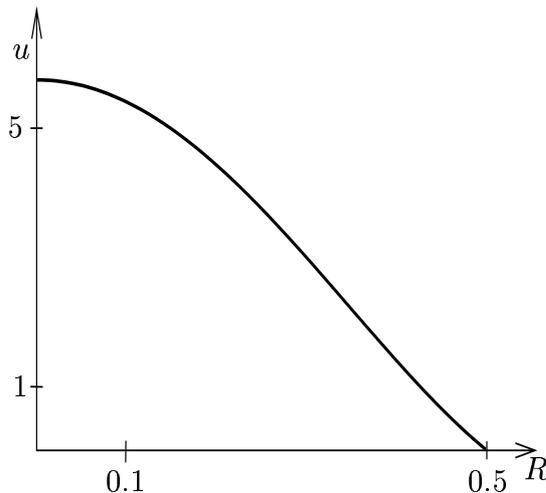


Abbildung 4.2: Die Funktion $U(r)$ in $(0, R)$ für $R = 1/2$

Die Funktion $U(r)$ ist offensichtlich zweimal stetig differenzierbar in $(0, R) \subset (0, 1)$ und positiv. Daß die Funktion $U(r)$ bei obiger Wahl von λ auch eine Lösung des Randwertproblems ist, rechnet man leicht nach. Zu zeigen bleibt, daß die Funktion $U(r)$ die Randbedingung bei 0 erfüllt. Dazu entwickelt man $U'(r)$ bei $r = 0$ in eine Reihe. Es gilt $U'(r) = O(r)$ und damit $\lim_{r \rightarrow 0} U'(r) = 0$.

Die Funktion $u(x) := U(|x|)$ ist dann eine positive Lösung des Eigenwertproblems (4.16) zum Eigenwert $\lambda = 1 + \pi^2/(4 \operatorname{Artanh}^2 R)$ und insbesondere muß es sich um die erste Eigenfunktion handeln, da nur diese keinen Vorzeichenwechsel im Gebiet D hat. Reskaliert man die Funktion u noch so, daß $u(0) = 1$ gilt, so ist der Satz bewiesen. \square

4.2 Der erste Eigenwert auf \mathbb{H}^n

Für $D' = \mathbb{H}^n$, $n \geq 3$ lautet die Eigenwertgleichung des Laplace-Beltrami-Operators in euklidischen Koordinaten

$$\rho^{-n} \nabla (\rho^{n-2} \nabla u) + \lambda u = 0 \quad \text{in } B_1(0). \quad (4.20)$$

Mit einem Symmetrisierungsargument folgt, daß eine erste Eigenfunktion, wenn sie existiert, ohne Beschränkung der Allgemeinheit radialsymmetrisch sein muß. Eine radialsymmetrische Lösung $U = U(r)$, $r = |x|$ der Gleichung (4.20) genügt der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$U'' + \left(\frac{n-1}{r} + (n-2) \rho(r) r \right) U' + \lambda \rho^2(r) U = 0 \quad \text{in } (0, 1) \quad (4.21)$$

mit der Randbedingung

$$U'(0) = 0. \quad (4.22)$$

Beispiel 1: Es sei U eine Lösung von (4.21) – (4.22) und $V := \rho^{\frac{n-2}{2}} U$. Dann löst V die Gleichung (vergl. Anhang A.1)

$$V'' + \frac{n-1}{r} V' + \left(\lambda - \frac{n(n-2)}{4} \right) \rho^2 V = 0 \quad \text{in } (0, 1). \quad (4.23)$$

mit der Randbedingung

$$V'(0) = 0. \quad (4.24)$$

Setzt man $\lambda := \frac{n(n-2)}{4}$, so hat die allgemeine Lösung des Randwertproblems die Form $V(r) = c_1$, wobei c_1 eine Konstante ist.

Somit löst $u(x) = c_1 \rho^{-\frac{n-2}{2}}(x)$ für $\lambda = \frac{n(n-2)}{4}$ die Eigenwertgleichung (4.20). Aber $u \notin L^2(\mathbb{H}^n, \rho^n dx)$, denn

$$\int_{\mathbb{H}^n} |u|^2 dV = \int_{B_1(0)} |u|^2 \rho^n dx = C \int_0^1 \rho^2 r^{n-1} dr = \tilde{C} \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(1-r^2)^2} dr = +\infty.$$

Beispiel 2: Es sei $n = 3$. Mit Hilfe von Maple findet man für $\lambda = 1$ eine Lösung der Gleichung (4.20), nämlich

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{|x|} \cdot \text{Artanh } |x|.$$

Aber es gilt $u \notin L^2(\mathbb{H}^3, \rho^3 dx)$.

Dies sind zwei Beispiele dafür, daß für bestimmte Werte von λ zwar eine Lösung der Eigenwertgleichung (4.20) existiert, diese aber nicht in $L^2(\mathbb{H}^n, \rho^n dx)$ ist. Die Singularität der Metrik auf dem Rand der Einheitskugel ist „zu stark“.

Vermutung: Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert keine Lösung $u \in L^2(\mathbb{H}^n, \rho^n dx)$ der Eigenwertgleichung (4.20), und somit gibt es auch keine Eigenwerte.

5 Das Brezis-Nirenberg Problem im \mathbb{H}^n

Wir formulieren das Brézis-Nirenberg Problem im n -dimensionalen hyperbolischen Raum \mathbb{H}^n :

Sei $D' \subset \mathbb{H}^n$, $n \geq 3$ ein beschränktes Gebiet, wobei der Rand dieses Gebiets so glatt sei, daß alle nötigen Rechen-Operationen (insbesondere die partielle Integration) möglich sind.

Gesucht wird nach Lösungen $u \in H_0^{1,2}(D')$ des Problems

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{H}^n} u + \lambda u + u^{2^*-1} &= 0 && \text{in } D' \\ u &> 0 && \text{in } D' \\ u &= 0 && \text{auf } \partial D' \end{aligned} \tag{BN}$$

wobei $2^* = \frac{2n}{n-2}$ der kritische Sobolevexponent ist und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Insbesondere sollen die Werte von λ bestimmt werden, für die eine Lösung existiert.

Wie schon in Kapitel 4 verwenden wir das konforme Kugelmodell des hyperbolischen Raums. Das Brézis-Nirenberg Problem (BN) lautet in euklidischen Koordinaten

$$\begin{aligned} \rho^{-n} \nabla(\rho^{n-2} \nabla u) + \lambda u + u^{2^*-1} &= 0 && \text{in } D \\ u &> 0 && \text{in } D \\ u &= 0 && \text{auf } \partial D \end{aligned} \tag{BN*}$$

mit $\rho(x) = \frac{2}{1-|x|^2}$ in $D \subset B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$.

5.1 Erste Betrachtungen

5.1.1 Regularität von Lösungen

Es soll gezeigt werden, daß eine schwache Lösung $u \in H_0^{1,2}(D')$ des Brézis-Nirenberg Problems (BN) bei genügend regulärem Rand des Grundgebiets bereits eine klassische Lösung $u \in C^2(\overline{D}')$ ist. Dazu werden einige Resultate aus der Regularitätstheorie für elliptische Differentialgleichungen benötigt, die jetzt ohne Beweis formuliert werden.

Lemma 5.1 (nach [Stru, Anhang B.3])

Sei D ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^n und $g : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, u) \mapsto g(x, u)$ eine Funktion so, daß $g(x, u)$ meßbar in $x \in D$ und stetig in $u \in \mathbb{R}$ ist. Außerdem gelte für fast alle $x \in D$

$$|g(x, u)| \leq a(x) (1 + |u|) \quad (5.1)$$

mit einer Funktion $a \in L^{n/2}(D)$. Sei $u \in H_0^{1,2}(D)$ eine schwache Lösung von

$$-\Delta u = g(\cdot, u) \quad \text{in } D. \quad (5.2)$$

Dann ist $u \in L^q(D)$ für jedes $q \in [1, \infty)$.

Lemma 5.2 (nach [GT, Kapitel 9]) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $C^{1,1}$ -Rand. Sei $f \in L^q(D)$ mit $1 < q < \infty$. Sei $u \in H_0^{1,2}(D)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } D \\ u &= 0 & \text{auf } \partial D. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dann gilt $u \in H^{2,q}(D)$.

Lemma 5.3 (nach [GT, Theorem 9.19]) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $C^{2,\alpha}$ -Rand. Sei $f \in C^{0,\alpha}(\overline{D})$. Sei $u \in H^{2,q}(D)$ mit $1 < q < \infty$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } D \\ u &= 0 & \text{auf } \partial D. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dann gilt $u \in C^{2,\alpha}(\overline{D})$.

Mit Hilfe der Lemmata 5.1–5.3 kann der folgende Regularitätssatz für Lösungen des Brézis-Nirenberg Problems bewiesen werden:

Satz 4 (Regularität von Lösungen)

Sei $D' \subset \mathbb{H}^n$, $n \geq 3$ ein beschränktes Gebiet mit $C^{2,\alpha}$ -Rand. Sei $u \in H_0^{1,2}(D')$ eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{H}^n} u + \lambda u + u^{2^*-1} &= 0 & \text{in } D' \\ u &= 0 & \text{auf } \partial D' \end{aligned} \quad (5.5)$$

wobei $2^* = \frac{2n}{n-2}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann ist u eine klassische Lösung, es gilt $u \in C^2(\overline{D}')$.

Bemerkung 5.1 Eine schwache Lösung $u \in H_0^{1,2}(D')$ des Brézis-Nirenberg Problems (BN) ist eine strikt positive, schwache Lösung des Randwertproblems (5.5). Satz 4 schließt schwache Lösungen des Brézis-Nirenberg Problems mit ein.

Bemerkung 5.2 Im konformen Kugelmodell des \mathbb{H}^n entspricht der Rand von D' dem Rand von D .

Beweis: Sei $u \in H_0^{1,2}(D')$ eine Lösung von (5.5). Die Funktion $v := \rho^{\frac{n-2}{2}} u \in H_0^{1,2}(D)$ ist eine Lösung des Randwertproblems¹

$$\begin{aligned} \Delta v + \left(\lambda - \frac{n(n-2)}{4} \right) \rho^2 v + v^{2^*-1} &= 0 & \text{in } D \\ v &= 0 & \text{auf } \partial D. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Definiert man $g : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(x, v) := \left(\lambda - \frac{n(n-2)}{4} \right) \rho^2(x) v + v^{2^*-1},$$

so ist g meßbar in $x \in D$ und stetig in $v \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$|g(x, v)| \leq \left| \left(\lambda - \frac{n(n-2)}{4} \right) \rho^2 + v^{2^*-2} \right| \cdot |v|$$

Da $u \in H_0^{1,2}(D')$ als existierende Lösung von (5.5) vorausgesetzt worden ist, ist auch $v \in H_0^{1,2}(D)$ eine „bekannte“ Funktion. Daher kann der erste Faktor als Funktion von x aufgefaßt werden. Es folgt

$$\begin{aligned} |g(x, v)| &\leq \left| \left(\lambda - \frac{n(n-2)}{4} \right) \rho^2 + v^{2^*-2} \right| \cdot (1 + |v|) \\ &= a(x) (1 + |v|) \end{aligned}$$

mit $a(x) := \left| \left(\lambda - \frac{n(n-2)}{4} \right) \rho^2(x) + v^{2^*-2}(x) \right|$.

Um Lemma 5.1 anwenden zu können, bleibt zu zeigen $a \in L^{n/2}(D)$. Dazu stellen wir fest, daß gilt

$$\int_D |v^{2^*-2}(x)|^{n/2} dx = \int_D |v(x)|^{\frac{2n-2n+4}{n-2} \cdot \frac{n}{2}} dx = \int_D |v(x)|^{2^*} dx < \infty,$$

da $v \in H_0^{1,2}(D) \subset L^{2^*}(D)$. Somit ist $v^{2^*-2} \in L^{n/2}(D)$. Mit der Stetigkeit des ersten Summanden von a und der Minkowski-Ungleichung folgt $a \in L^{n/2}(D)$.

Somit ist Lemma 5.1 anwendbar und liefert $v \in L^q(D)$ für jedes $q \in [1, \infty)$. Insbesondere ist $f(x) := g(x, v(x)) \in L^q(D)$ für jedes $q \in [1, \infty)$.

¹ Für die detaillierte Herleitung sei auf Anhang A.1 verwiesen.

D ist ein Gebiet mit $C^{2,\alpha}$ -Rand. Die Funktion $v \in H_0^{1,2}(D)$ ist eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta v &= f && \text{in } D \\ v &= 0 && \text{auf } \partial D, \end{aligned} \tag{5.7}$$

wobei $f = \left(\lambda - \frac{n(n-2)}{4}\right) \rho^2 v + v^{2^*-1} \in L^q(D)$ für jedes $q \in [1, \infty)$.

Mit Lemma 5.2 folgt daher $v \in H^{2,q}(D)$ für jedes $q \in (1, \infty)$ und aufgrund der Sobolev'schen Einbettungssätze ([Ad, Theorem 5.4]) gilt $v \in C^{0,\tilde{\alpha}}(\overline{D})$ für $0 < \tilde{\alpha} < 1$. Dann ist auch $f \in C^{0,\tilde{\alpha}}(\overline{D})$ für $0 < \tilde{\alpha} < 1$ und mit Lemma 5.3 ergibt sich $v \in C^{2,\alpha}(\overline{D})$.

Schließlich ist aufgrund der Regularität und Positivität von ρ in D auch die Funktion $u = \rho^{\frac{n-2}{2}} v \in C^{2,\alpha}(\overline{D})$ und Satz 4 ist bewiesen. \square

5.1.2 Radialsymmetrie von Lösungen

Für Lösungen von Differentialgleichungen auf geodätischen Kugeln im \mathbb{H}^n gilt das folgende Symmetrieresultat:

Lemma 5.4 ([KuP]) *Es sei D' eine geodätische Kugel im \mathbb{H}^n und $u \in C^2(\overline{D}')$ eine positive Lösung des Randwertproblems*

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{H}^n} u + f(u) &= 0 && \text{in } D' \\ u &= 0 && \text{auf } \partial D', \end{aligned}$$

wobei f eine C^1 -Funktion ist. Dann ist u radialsymmetrisch.

Bemerkung 5.3 Kumaresan und Prajapat verallgemeinern in [KuP] die klassischen Resultate von Gidas, Ni und Nirenberg [GNN] auf Gebiete im hyperbolischen Raum und auf der Sphäre. Für die Beweise benutzen sie ebenfalls die Moving-Plane-Methode.

Korollar 5.5 *Jede Lösung $u \in H_0^{1,2}(D')$ des Brézis-Nirenberg Problems (BN) auf einer geodätischen Kugel $D' \subset \mathbb{H}^n$ ist radialsymmetrisch.*

Beweis: Es sei $u \in H_0^{1,2}(D')$ eine Lösung des Brézis-Nirenberg Problems auf D' . Da der Rand einer Kugel beliebig glatt ist, folgt mit Abschnitt 5.1.1, das gilt $u \in C^2(\overline{D}')$. Außerdem ist die Funktion $f(u) = \lambda u + u^{2^*-1}$ stetig differenzierbar in u . it obigem Lemma folgt, daß u radialsymmetrisch ist. \square

5.1.3 Gebietstransformationen

Es soll gezeigt werden, daß wir bei der Suche nach Lösungen des Brézis-Nirenberg Problems auf $D' \subset \mathbb{H}^n$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, daß gilt $0 \in D'$. Dazu benutzen wir die in Formel (2.9) auf Seite 10 eingeführte Isometrie T_y .

Es sei $D' \subset \mathbb{H}^n$ ein beschränktes Gebiet und $y \in D'$ beliebig, aber fest gewählt. Die Isometrie

$$T_y(x) = \frac{(1 - |y|^2)(x - y) - |x - y|^2 y}{1 + |x|^2 |y|^2 - 2x \cdot y} \quad (5.8)$$

bildet das Gebiet D' auf das Gebiet $\tilde{D}' = T_y(D')$ ab und es gilt $T_y(y) = 0 \in \tilde{D}'$. Insbesondere ist T_y ein Diffeomorphismus mit der Umkehrfunktion

$$T_y^{-1}(z) = \frac{(1 - |y|^2)(z + y) + |z + y|^2 y}{1 + |z|^2 |y|^2 + 2z \cdot y}. \quad (5.9)$$

Lemma 5.6 *Es sei $u \in H_0^{1,2}(D')$ eine schwache Lösung des Brézis-Nirenberg Problems (BN) auf D' , das heißt u ist strikt positiv und es gilt*

$$\int_D \nabla u \nabla \varphi \rho^{n-2} dx - \lambda \int_D u \varphi \rho^n dx - \int_D u^{2^*-1} \varphi \rho^n dx = 0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(D)$. (5.10)

Definiert man \tilde{u} auf \tilde{D}' durch $\tilde{u} = u \circ T_y^{-1}$, so ist \tilde{u} eine schwache Lösung des Brézis-Nirenberg Problems auf \tilde{D}' .

Beweis: Mit u ist auch $\tilde{u} = u \circ T_y^{-1}$ strikt positiv. Es bleibt zu zeigen, daß gilt

$$\int_{\tilde{D}} \nabla \tilde{u} \nabla \tilde{\varphi} \rho^{n-2} dz - \lambda \int_{\tilde{D}} \tilde{u} \tilde{\varphi} \rho^n dz - \int_{\tilde{D}} \tilde{u}^{2^*-1} \tilde{\varphi} \rho^n dz = 0$$

für alle $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\tilde{D})$. (5.11)

Sei $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\tilde{D})$ beliebig. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $T := T_y$ und

$$[x, y] := 1 + |x|^2 |y|^2 - 2x \cdot y.$$

Man berechnet mit der Koordinatentransformation $z = T(x)$ und Formel (2.13)

$$\begin{aligned}
 & \int_{\bar{D}} \tilde{u}(z) \tilde{\varphi}(z) \rho^n(z) dz \\
 &= \int_D \tilde{u}(T(x)) \tilde{\varphi}(T(x)) (\rho(T(x)))^n |\det T'(x)| dx \\
 &= \int_D u(x) \tilde{\varphi}(T(x)) \cdot \left(\frac{2[x, y]}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)} \right)^n \cdot \left(\frac{1 - |y|^2}{[x, y]} \right)^n dx \\
 &= \int_D u(x) (\tilde{\varphi} \circ T)(x) \rho^n(x) dx \tag{5.12}
 \end{aligned}$$

und analog

$$\int_{\bar{D}} \tilde{u}^{2^*-1}(z) \tilde{\varphi}(z) \rho^n(z) dz = \int_D u^{2^*-1}(x) (\tilde{\varphi} \circ T)(x) \rho^n(x) dx. \tag{5.13}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
 & \int_{\bar{D}} \nabla \tilde{u}(z) \nabla \tilde{\varphi}(z) \rho^{n-2}(z) dz \\
 &= \int_D \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \tilde{u}(T(x)), \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \tilde{u}(T(x)) \right) \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \tilde{\varphi}(T(x)), \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \tilde{\varphi}(T(x)) \right)^t \\
 &\quad \cdot (\rho(T(x)))^{n-2} |\det T'(x)| dx \\
 &= \int_D \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \tilde{u}(T(x)), \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \tilde{u}(T(x)) \right) \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \tilde{\varphi}(T(x)), \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \tilde{\varphi}(T(x)) \right)^t \\
 &\quad \cdot \left(\frac{2[x, y]}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)} \right)^{n-2} \cdot \left(\frac{1 - |y|^2}{[x, y]} \right)^n dx \\
 &= \int_D \left(\frac{\partial}{\partial z_1} u(x), \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} u(x) \right) \left(\frac{\partial}{\partial z_1} (\tilde{\varphi} \circ T)(x), \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} (\tilde{\varphi} \circ T)(x) \right)^t \\
 &\quad \cdot \rho^{n-2}(x) \cdot \left(\frac{1 - |y|^2}{[x, y]} \right)^2 dx.
 \end{aligned}$$

Für $1 \leq i \leq n$ ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{u}(T(x)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{u}(T(x))}{\partial T_j(x)} \cdot \frac{\partial T_j(x)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial T_j(x)}{\partial x_i}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} u(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} u(x) \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial z_1} u(x), \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} u(x) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial T_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial T_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial z_1} u(x), \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} u(x) \right) T'(x) \end{aligned}$$

und damit

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1} u(x), \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} u(x) \right) = (\nabla u(x)) \cdot (T'(x))^{-1}.$$

Analog ergibt sich

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1} (\tilde{\varphi} \circ T)(x), \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} (\tilde{\varphi} \circ T)(x) \right) = (\nabla(\tilde{\varphi} \circ T)(x)) \cdot (T'(x))^{-1}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial z_1} u(x), \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} u(x) \right) \left(\frac{\partial}{\partial z_1} (\tilde{\varphi} \circ T)(x), \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} (\tilde{\varphi} \circ T)(x) \right)^t \\ &= ((\nabla u(x)) \cdot (T'(x))^{-1}) \cdot ((\nabla(\tilde{\varphi} \circ T)(x)) \cdot (T'(x))^{-1})^t \\ &= (\nabla u(x)) \cdot (T'(x))^{-1} \cdot ((T'(x))^t)^{-1} \cdot (\nabla(\tilde{\varphi} \circ T)(x))^t \\ &= (\nabla u(x)) \cdot ((T'(x))^t \cdot T'(x))^{-1} \cdot (\nabla(\tilde{\varphi} \circ T)(x))^t \end{aligned}$$

und mit Formel (2.12) folgt

$$\begin{aligned} &(\nabla u(x)) \cdot ((T'(x))^t \cdot T'(x))^{-1} \cdot (\nabla(\tilde{\varphi} \circ T)(x))^t \\ &= (\nabla u(x)) \cdot \left(\frac{1 - |y|^2}{[x, y]} \right)^{-2} E \cdot (\nabla(\tilde{\varphi} \circ T)(x))^t \\ &= \left(\frac{[x, y]}{1 - |y|^2} \right)^2 \nabla u(x) \nabla(\tilde{\varphi} \circ T)(x). \end{aligned}$$

Eingesetzt in die obige Integralgleichung ist schließlich

$$\int_{\tilde{D}} \nabla \tilde{u}(z) \nabla \tilde{\varphi}(z) \rho^{n-2}(z) dz = \int_D \nabla u(x) \nabla(\tilde{\varphi} \circ T)(x) \rho^{n-2}(x) dx. \quad (5.14)$$

Nach Voraussetzung ist $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\tilde{D})$. Da die hyperbolische Translation $T : D \rightarrow \tilde{D}$ eine analytische Funktion ist, gilt $\tilde{\varphi} \circ T \in C_0^\infty(D)$. Mit (5.12) - (5.14) folgt

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{D}} \nabla \tilde{u} \nabla \tilde{\varphi} \rho^{n-2} dz - \lambda \int_{\tilde{D}} \tilde{u} \tilde{\varphi} \rho^n dz - \int_{\tilde{D}} \tilde{u}^{2^*-1} \tilde{\varphi} \rho^n dz \\ &= \int_D \nabla u \nabla (\tilde{\varphi} \circ T) \rho^{n-2} dx - \lambda \int_D u (\tilde{\varphi} \circ T) \rho^n dx - \int_D u^{2^*-1} (\tilde{\varphi} \circ T) \rho^n dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

da u eine schwache Lösung des Brézis-Nirenberg Problems ist. Weil $\tilde{\varphi}$ beliebig vorausgesetzt war, folgt

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{D}} \nabla \tilde{u} \nabla \tilde{\varphi} \rho^{n-2} dz - \lambda \int_{\tilde{D}} \tilde{u} \tilde{\varphi} \rho^n dz - \int_{\tilde{D}} \tilde{u}^{2^*-1} \tilde{\varphi} \rho^n dz = 0 \\ \text{für alle } \tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\tilde{D}), \end{aligned} \quad (5.15)$$

und das Lemma ist bewiesen. □

Korollar 5.7 *Es sei $u \in C^2(\overline{D'})$ eine klassische Lösung des Brézis-Nirenberg Problems auf D' . Dann ist $\tilde{u} := u \circ T_y^{-1}$ eine klassische Lösung des Brézis-Nirenberg Problems auf \tilde{D}' .*

Beweis: Jede klassische Lösung ist auch immer eine schwache Lösung, und deswegen ist nach Lemma 5.6 die Funktion \tilde{u} eine schwache Lösung des Brézis-Nirenberg Problems auf \tilde{D} .

Da die Funktion T_y analytisch ist, gilt mit $u \in C^2(\overline{D})$ auch $\tilde{u} := u \circ T_y^{-1}$ in $C^2(\overline{\tilde{D}})$. □

Analog zu Lemma 5.6 und Korollar 5.7 zeigt man

Lemma 5.8 *Es sei $\tilde{u} \in H_0^{1,2}(\tilde{D}')$ eine schwache Lösung des Brézis-Nirenberg Problems (BN) auf \tilde{D}' .*

Definiert man u auf D' durch $u = \tilde{u} \circ T_y$, so ist u eine schwache Lösung des Brézis-Nirenberg Problems auf D' .

Korollar 5.9 *Es sei $\tilde{u} \in C^2(\overline{\tilde{D}'})$ eine klassische Lösung des Brézis-Nirenberg Problems auf \tilde{D}' . Dann ist $u := \tilde{u} \circ T_y$ eine klassische Lösung des Brézis-Nirenberg Problems auf D' .*

Somit kann man bei der Suche nach Lösungen des Brézis-Nirenberg Problems auf $D' \subset \mathbb{H}^n$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $0 \in D'$ gilt.

Existiert eine Lösung des Brézis-Nirenberg Problems auf \tilde{D}' , so existiert auch eine

Lösung auf D' (Lemma 5.8, Korollar 5.9). Existiert keine Lösung auf \tilde{D}' , gibt es auch keine Lösung auf D' . Denn existierte eine Lösung auf D' , wäre $\tilde{u} = u \circ T_y^{-1}$ eine Lösung auf \tilde{D}' (Lemma 5.6, Korollar 5.7), was im Widerspruch zur Nichtexistenz einer Lösung auf \tilde{D}' stünde.

Bemerkung 5.4 Ist $D' \subset \mathbb{H}^n$ eine geodätische Kugel mit Mittelpunkt x , so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Mittelpunkt der Punkt 0 ist, da die Isometrie T_x die Kugel $\mathfrak{B}_\theta(x)$ auf die Kugel $\tilde{D}' = \mathfrak{B}_\theta(0)$ abbildet (vergl. Lemma 2.1).

5.1.4 Variationsproblem

Das zugehörige Variationsproblem zum Brézis-Nirenberg Problem (BN*) lautet

$$S_{\lambda,\rho}(D) = \inf_{v \in X_\rho} \left\{ \int_D |\nabla v|^2 \rho^{n-2} dx - \lambda \int_D v^2 \rho^n dx \right\} \quad (5.16)$$

mit $X_\rho = \{v \in H_0^{1,2}(D) \mid \int_D |v|^{2^*} \rho^n dx = 1\}$.

Bemerkung 5.5 Für ein beliebiges $v \in H_0^{1,2}(D)$ mit $\int_D v^{2^*} \rho^n dx = 1$ gilt:

1. Für $\lambda \leq 0$ ist $S_{\lambda,\rho}(D) \geq 0 > -\infty$.
2. Für $\lambda > 0$ folgt mit der Positivität des Gradiententerms und der Hölderschen Ungleichung in \mathbb{H}^n

$$\begin{aligned} \int_D |\nabla v|^2 \rho^{n-2} dx - \lambda \int_D v^2 \rho^n dx &\geq -\lambda \int_D |v|^2 \rho^n dx \\ &\geq -\lambda C \int_D |v|^{2^*} \rho^n dx \geq -\lambda C > -\infty, \end{aligned}$$

wobei $C = C(n, D)$ eine Konstante ist. Es folgt $S_{\lambda,\rho}(D) \geq -\lambda C > -\infty$.

Also existiert das Infimum (5.16).

Lemma 5.10 *Es sei $\lambda < \lambda_1$. Dann ist ein Minimierer des Variationsproblems (5.16) nach geeigneter Skalierung eine schwache Lösung des Randwertproblems*

$$\begin{aligned} \rho^{-n} \nabla(\rho^{n-2} \nabla v) + \lambda v + v^{2^*-1} &= 0 && \text{in } D \\ v &\geq 0 && \text{in } D \\ v &= 0 && \text{auf } \partial D. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Beweis: Es sei $v \in X_\rho \subset H_0^{1,2}(D)$ ein Minimierer des Variationsfunktional (5.16). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $v \geq 0$ in D , denn mit v ist auch $|v|$ ein Minimierer.

Aufgrund der Lagrangeschen Multiplikatorenregel existiert dann ein $\mu \neq 0$ so, daß gilt

$$\int_D 2 \nabla v \nabla \varphi \rho^{n-2} dx - \lambda \int_D 2 v \varphi \rho^n dx - \mu \int_D 2^* v^{2^*-1} \varphi \rho^n dx = 0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(D)$. Es folgt: $v \in H_0^{1,2}(D)$ ist schwache Lösung der Eulerschen Differentialgleichung

$$\nabla(\rho^{n-2} \nabla v) + \lambda v \rho^n + \mu \frac{n}{n-2} v^{2^*-1} \rho^n = 0 \quad \text{in } D. \quad (5.18)$$

Reskaliert man v und setzt $v = \alpha \tilde{v}$ mit $\alpha > 0$, so ist $\tilde{v} \in H_0^{1,2}(D)$, $\tilde{v} \geq 0$ in D und \tilde{v} löst die Differentialgleichung

$$\nabla(\rho^{n-2} \nabla \tilde{v}) + \lambda \tilde{v} \rho^n + \mu \frac{n}{n-2} \alpha^{2^*-1-1} \tilde{v}^{2^*-1} \rho^n = 0 \quad \text{in } D. \quad (5.19)$$

Testet man die Gleichung (5.19) mit der ersten, positiven Eigenfunktion u_1 zum Eigenwert λ_1 , so folgt nach zweimaliger partieller Integration

$$-(\lambda_1 - \lambda) \int_D \tilde{v} u_1 \rho^n dx = -\mu \frac{n}{n-2} \alpha^{2^*-2} \int_D \tilde{v}^{2^*-1} u_1 \rho^n dx.$$

Da $\lambda_1 - \lambda$ nach Voraussetzung positiv ist, und α sowie die beiden Integrale positiv sind, muß auch μ positiv sein. Damit ergibt sich $\mu \frac{n}{n-2} \alpha^{2^*-2} > 0$, und wir können α so wählen, daß $\mu \frac{n}{n-2} \alpha^{2^*-2} = 1$ gilt.

Eingesetzt in (5.19) folgt, die Funktion $\tilde{v} = \left(\frac{n-2}{\mu n}\right)^{-\frac{n-2}{4}} v \in H_0^{1,2}(D)$ ist eine nicht-negative Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \rho^{-n} \nabla(\rho^{n-2} \nabla \tilde{v}) + \lambda \tilde{v} + \tilde{v}^{2^*-1} &= 0 & \text{in } D \\ \tilde{v} &\geq 0 & \text{in } D \\ \tilde{v} &= 0 & \text{auf } \partial D. \end{aligned} \quad (5.20)$$

□

Bemerkung 5.6 Für $\lambda > \lambda_1$ beziehungsweise $\mu < 0$ ist ein reskaliertes Minimierer eine Lösung der Gleichung

$$\rho^{-n} \nabla(\rho^{n-2} \nabla \tilde{v}) + \lambda \tilde{v} - \tilde{v}^{2^*-1} = 0 \quad \text{in } D$$

Das ist ein anderes Problem, das hier nicht betrachtet werden soll.

Bemerkung 5.7 Damit der reskalierte, positive Minimierer \tilde{v} auch eine Lösung des Brézis-Nirenberg Problems (BN) ist, muß $\tilde{v} > 0$ in D gelten.

Dies ist immer dann der Fall, wenn der Rand des Gebiets D' beziehungsweise D genügend regulär (zum Beispiel $C^{2,\alpha}$) ist. Der Regularitätssatz aus Abschnitt 5.1.1 liefert dann, daß \tilde{v} eine klassische Lösung von (5.20) ist, und da

$$-\nabla(\rho^{n-2}\nabla\tilde{v}) = \lambda\rho^n\tilde{v} + \rho^n\tilde{v}^{2^*-1} \geq 0$$

gilt, können wir das starke Maximumprinzip anwenden. Es folgt $\tilde{v} > 0$ in D .

Bemerkung 5.8 Eine Lösung des Brézis-Nirenberg Problems (BN) ist nicht automatisch auch ein Minimierer des Variationsproblems (5.16), sondern nur ein kritischer Punkt desselben.

Bemerkung 5.9 Eine zu (5.16) äquivalente Formulierung des Variationsproblems ist

$$\inf_{\substack{v \in H_0^{1,2}(D) \\ v \neq 0}} \frac{\int_D |\nabla v|^2 \rho^{n-2} dx - \lambda \int_D v^2 \rho^n dx}{\left(\int_D |v|^{2^*} \rho^n dx\right)^{2/2^*}}. \quad (5.21)$$

Dies folgt aus der Skalierungsinvarianz des Quotienten.

5.1.5 Das Prinzip der konzentrierten Kompaktheit

Ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Minimierers des Variationsproblems (5.16) ist das folgende Lemma:

Lemma 5.11 (Lemma über konzentrierte Kompaktheit (P.L. Lions, [Li]))

Es sei S^ die klassische Sobolevkonstante. Falls gilt*

$$S_{\lambda,\rho}(D) < S^*$$

nimmt $S_{\lambda,\rho}(D)$ das Minimum an.

Bemerkung 5.10 Aufgrund der Sobolevschen Einbettungssätze (vergl. [Ad, Theorem 5.4]) ist $H_0^{1,2}(D)$ stetig einbettbar in $L^{2^*}(D)$, und es existiert eine (maximale) Konstante $S^* = S^*(n)$, so daß die Ungleichung

$$S^* \left(\int_D |u|^{2^*} dx \right)^{2/2^*} \leq \int_D |\nabla u|^2 dx \quad (5.22)$$

für alle $u \in H_0^{1,2}(D)$ erfüllt ist. S^* wird als klassische Sobolevkonstante bezeichnet. Dabei ist die Sobolevkonstante unabhängig vom Grundgebiet D (vergl. [Stru, I.4]), und kann explizit ausgerechnet werden (vergl. [Ta]). Es gilt

$$S^* = n(n-2) \pi \left(\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \right)^{2/n}.$$

Bemerkung 5.11 Mit Lemma 5.11 folgt (vergl. [B2]):

- (i) Falls für ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ gilt $S_{\lambda_0, \rho}(D) < S^*$ und somit ein Minimierer von $S_{\lambda_0, \rho}(D)$ existiert, existiert für alle $\lambda > \lambda_0$ ebenfalls ein Minimierer.
- (ii) Sei λ_1 der erste Dirichlet-Eigenwert des Laplace-Beltrami-Operators. Es gilt $S_{\lambda_1, \rho}(D) = 0 < S^*$. Also existiert ein $\lambda^* < \lambda_1$, so daß $S_{\lambda, \rho}(D) < S^*$ für alle $\lambda > \lambda^*$ gilt.

Bemerkung 5.12 Im kritischen Fall $S_{\lambda^*, \rho}(D) = S^*$ kann man die Existenz eines Minimierers nicht a-priori ausschließen. Zu jedem Punkt $x \in D$ existiert aber eine Minimalfolge, die sich in x konzentriert (vergl. [B2], [BBF]).

5.2 Nichtexistenz von Lösungen

5.2.1 Nichtexistenz für $\lambda \geq \lambda_1$

Lemma 5.12 Für $\lambda \geq \lambda_1$ existiert keine Lösung von (BN). Hierbei ist λ_1 der erste Dirichlet-Eigenwert des Laplace-Beltrami Operators $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$ auf D' .

Beweis: Es wird angenommen, $u \in H_0^{1,2}(D')$ sei eine Lösung von (BN). Multipliziert man die Differentialgleichung mit der ersten, positiven Eigenfunktion u_1 zum Eigenwert λ_1 und integriert über D' , erhält man

$$\int_{D'} \Delta_{\mathbb{H}^n} u \cdot u_1 \, dV + \lambda \int_{D'} u \cdot u_1 \, dV + \int_{D'} u^{2^*-1} \cdot u_1 \, dV = 0.$$

Nach zweimaliger partieller Integration des ersten Terms ergibt sich daraus

$$\int_{D'} u \cdot (-\lambda_1 u_1) \, dV + \lambda \int_{D'} u \cdot u_1 \, dV + \int_{D'} u^{2^*-1} \cdot u_1 \, dV = 0,$$

was äquivalent ist zu

$$\int_{D'} (\lambda - \lambda_1) u u_1 \, dV = - \int_{D'} u^{2^*-1} u_1 \, dV.$$

Da $u > 0$ und $u_1 > 0$ in D gilt, ist die rechte Seite der Gleichung echt negativ. Die linke Seite dagegen ist positiv, weil nach Voraussetzung $\lambda - \lambda_1 \geq 0$ ist. Aus diesem Widerspruch folgt, daß für $\lambda \geq \lambda_1$ keine Lösung von (BN) existieren kann. \square

5.2.2 Nichtexistenz für $\lambda \leq \frac{n(n-2)}{4}$

Lemma 5.13 *Es sei $D' \subset \mathbb{H}^n$, $n \geq 3$ offen, beschränkt und sternförmig bezüglich $0 \in D'$ mit $C^{2,\alpha}$ -Rand. Es sei $\lambda \leq \frac{n(n-2)}{4}$. Dann existiert keine Lösung von (BN).*

Beweis: Um das Lemma zu beweisen, benutzen wir eine Pohožaev-Identität. Angenommen $u \in H_0^{1,2}(D')$ ist eine Lösung von (BN). Die Funktion $v := \rho^{\frac{n-2}{2}} u \in H_0^{1,2}(D)$ ist dann eine Lösung des Randwertproblems²

$$-\Delta v = \mu \rho^2 v + v^{2^*-1} \quad \text{in } D \quad (5.23)$$

$$v > 0 \quad \text{in } D \quad (5.24)$$

$$v = 0 \quad \text{auf } \partial D \quad (5.25)$$

mit $\mu := \lambda - \frac{n(n-2)}{4}$. Mit den Regularitätssätzen aus Abschnitt 5.1.1 folgt $v \in C^2(\overline{D})$, und die Gleichung (5.23) gilt im klassischen Sinne. Multipliziert man (5.23) mit $x \nabla v$ und formt beide Seiten einzeln um, ergibt sich für die linke Seite der Gleichung

$$\begin{aligned} (-\Delta v)(x \nabla v) &= -\nabla (\nabla v \cdot (x \nabla v)) + \nabla v \cdot \nabla (x \nabla v) \\ &= -\nabla (\nabla v \cdot (x \nabla v)) + |\nabla v|^2 + x \cdot \nabla \left(\frac{|\nabla v|^2}{2} \right) \\ &= -\nabla (\nabla v \cdot (x \nabla v)) + |\nabla v|^2 + \nabla \left(x \cdot \frac{|\nabla v|^2}{2} \right) - n \frac{|\nabla v|^2}{2} \\ &= -\nabla \left(\nabla v \cdot (x \nabla v) - x \cdot \frac{|\nabla v|^2}{2} \right) + \left(1 - \frac{n}{2} \right) |\nabla v|^2 \end{aligned}$$

und für die rechte Seite

$$\begin{aligned} (\mu \rho^2 v + v^{2^*-1})(x \nabla v) &= x \mu \rho^2 \frac{1}{2} \nabla (v^2) + x \frac{1}{2^*} \nabla (v^{2^*}) \\ &= \frac{\mu}{2} x \nabla (\rho^2 v^2) - \frac{\mu}{2} x v^2 \nabla (\rho^2) + x \frac{\nabla (v^{2^*})}{2^*} \\ &= \nabla \left(x \left(\frac{v^{2^*}}{2^*} + \frac{\mu}{2} \rho^2 v^2 \right) \right) \\ &\quad - n \left(\frac{v^{2^*}}{2^*} + \frac{\mu}{2} \rho^2 v^2 \right) - \frac{\mu}{2} x v^2 \nabla (\rho^2). \end{aligned}$$

² Für die detaillierte Herleitung sei auf Anhang A.1 verwiesen.

Gleichung (5.23) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & -\nabla \left(\nabla v \cdot (x \nabla v) - x \cdot \frac{|\nabla v|^2}{2} \right) + \left(1 - \frac{n}{2} \right) |\nabla v|^2 \\ & = \nabla \left(x \left(\frac{v^{2^*}}{2^*} + \frac{\mu}{2} \rho^2 v^2 \right) \right) - n \left(\frac{v^{2^*}}{2^*} + \frac{\mu}{2} \rho^2 v^2 \right) - \frac{\mu}{2} x v^2 \nabla(\rho^2) \end{aligned} \quad (5.26)$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} & -\nabla \left(\nabla v \cdot (x \nabla v) - x \cdot \frac{|\nabla v|^2}{2} + x \left(\frac{v^{2^*}}{2^*} + \frac{\mu}{2} \rho^2 v^2 \right) \right) \\ & = \frac{n-2}{2} (|\nabla v|^2 - v^{2^*}) - \mu \frac{n}{2} \rho^2 v^2 - \mu x \frac{1}{2} v^2 \nabla(\rho^2). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Integriert man diesen Ausdruck über D , integriert auf der linken Seite partiell und nutzt auf der rechten Seite die Differentialgleichung (5.23) für v in Integralform, ergibt sich

$$\begin{aligned} & -\int_{\partial D} \left(\nabla v \cdot (x \nabla v) - x \cdot \frac{|\nabla v|^2}{2} + x \left(\frac{v^{2^*}}{2^*} + \frac{\mu}{2} \rho^2 v^2 \right) \right) \cdot \nu \, dS \\ & = \int_D \frac{n-2}{2} \mu \rho^2 v^2 \, dx - \int_D \frac{n}{2} \mu \rho^2 v^2 \, dx - \int_D \mu x \frac{1}{2} v^2 \nabla(\rho^2) \, dx \end{aligned}$$

wobei ν der äußere Einheitsnormalenvektor an ∂D ist. Berücksichtigt man, daß auf ∂D gilt $v = 0$ und außerdem $\frac{\partial v}{\partial \nu} = \nu \cdot \nabla v$ ist, folgt

$$\int_{\partial D} \left(\left(\nu \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) \cdot \left(x \nu \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) - \frac{1}{2} x \left| \nu \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2 \right) \cdot \nu \, dS = \int_D \mu \left(\rho^2 + \frac{x}{2} \nabla(\rho^2) \right) v^2 \, dx,$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{1}{2} \int_{\partial D} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2 (x \cdot \nu) \, dS = \left(\lambda - \frac{n(n-2)}{4} \right) \int_D (1 + \rho |x|^2) \rho^2 v^2 \, dx. \quad (5.28)$$

Da mit D' auch D sternförmig bezüglich 0 ist, gilt $(x \cdot \nu) > 0$ auf einer Teilmenge von ∂D mit positivem Maß ([PuS, S.682]). Aus der strikten Positivität von v in D folgt mit dem Hopfschen Lemma ([Ev, S.330]), daß $\left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right| > 0$ auf ∂D gelten muß. Somit ist die linke Seite der Gleichung strikt positiv. Das Integral auf der rechten Seite ist ebenfalls positiv, während $\left(\lambda - \frac{n(n-2)}{4} \right)$ nach Voraussetzung negativ ist. Es ergibt sich ein Widerspruch, so daß keine Lösung des Brézis-Nirenberg Problems existieren kann. \square

Korollar 5.14 *Es sei $D' \subset \mathbb{H}^n$, $n \geq 3$ offen, beschränkt und sternförmig mit $C^{2,\alpha}$ -Rand. Es sei $\lambda \leq \frac{n(n-2)}{4}$. Dann existiert keine Lösung von (BN).*

Beweis: Es sei $x_0 \in D'$ ein Sternzentrum von D' . Die in Abschnitt 2.2 eingeführte Isometrie

$$T_{x_0}(x) = \frac{(1 - |x_0|^2)(x - x_0) - |x - x_0|^2 x_0}{1 + |x|^2 |x_0|^2 - 2x \cdot x_0}$$

bildet D' ab auf die Menge $\tilde{D}' \subset B_1(0)$. Diese ist sternförmig bezüglich 0 (vergl. Lemma 2.2 auf Seite 13) und hat ebenfalls einen $C^{2,\alpha}$ -Rand.

Sei u eine Lösung des Brézis-Nirenberg Problems auf D' . Wir definieren $\tilde{u} : \tilde{D}' \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{u} := u \circ T_{x_0}^{-1}.$$

Da T_{x_0} eine Isometrie ist, ist \tilde{u} eine Lösung des Brézis-Nirenberg Problems auf \tilde{D}' (vergl. Abschnitt 5.1.3).

Dies steht im Widerspruch zu Lemma 5.13, denn nach Lemma 5.13 existiert für $\lambda \leq \frac{n(n-2)}{4}$ keine Lösung auf \tilde{D}' . Somit kann auch keine Lösung auf D' existieren. \square

Bemerkung 5.13 Es ist möglich, daß auf nicht sternförmigen Gebieten D' eine Lösung des Problems (BN) existiert. Im euklidischen Fall existiert zum Beispiel für jedes $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$ eine radialsymmetrische Lösung, falls das Grundgebiet ein Kreisring ist (vergl. [BN, S. 442]).

5.3 Der Fall $n \geq 4$

Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist

Satz 5 (Existenz und Nichtexistenz von Lösungen für $n \geq 4$)

Es sei $D' \subset \mathbb{H}^n$, $n \geq 4$ ein beschränktes Gebiet mit $C^{2,\alpha}$ -Rand. Dann gilt:

- (i) Für jedes $\lambda \in \left(\frac{n(n-2)}{4}, \lambda_1\right)$ existiert eine Lösung $u \in C^2(\overline{D'})$ des Brezis-Nirenberg Problems (BN).
- (ii) Für $\lambda \geq \lambda_1$ existiert keine Lösung des Problems (BN).
- (iii) Falls D' sternförmig ist, existiert für $\lambda \leq \frac{n(n-2)}{4}$ keine Lösung des Problems (BN).

Bemerkung 5.14 In Abschnitt 5.2 sind die Punkte (ii) und (iii) des Satzes bereits gezeigt worden. Außerdem wissen wir, daß jede schwache Lösung bei genügend glattem Rand von D' auch eine klassische Lösung ist.

Um Satz 5 zu beweisen, werden mehrere Lemmata benötigt. Diese werden im folgenden bereitgestellt.

Lemma 5.15 Es sei $D' = \mathfrak{B}_\theta(0) \subset \mathbb{H}^n$, $n \geq 4$ eine geodätische Kugel um 0 mit Radius $\theta \in (0, \infty)$. Für jedes $\lambda > \frac{n(n-2)}{4}$ gilt dann

$$S_{\lambda,\rho}(D) < S^*.$$

Bemerkung 5.15 Die geodätische Kugel $D' = \mathfrak{B}_\theta(0)$ entspricht der euklidischen Kugel $D = B_R = B_R(0)$ mit $R = \tanh \frac{\theta}{2}$.

Beweis: Wir schätzen den Quotienten

$$Q_{\lambda,\rho}(u) = \frac{\int_D |\nabla u|^2 \rho^{n-2} dx - \lambda \int_D u^2 \rho^n dx}{\left(\int_D |u|^{2^*} \rho^n dx\right)^{2/2^*}} \quad (5.29)$$

geeignet ab. Dazu sei für $\varepsilon > 0$ und $x \in D$

$$v_\varepsilon(x) := \frac{\varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{(n-2)/2}}$$

und

$$u_\varepsilon(x) := \rho^{-(n-2)/2}(x) \cdot v_\varepsilon(x),$$

wobei φ eine fest gewählte, genügend glatte, positive Abschneidefunktion auf D mit den Eigenschaften

$$\varphi \equiv 1 \text{ in einer Umgebung von } 0, \quad \varphi = 0 \text{ auf } \partial D$$

ist. Man beachte bei der Definition von v_ε , daß in der Sobolevungleichung (5.22) für die Funktion $(\varepsilon + |x|^2)^{-(n-2)/2}$, $x \in D = \mathbb{R}^n$ Gleichheit gilt (vergl. [Ta]).

Eingesetzt in den Quotienten (5.29) ergibt sich³

$$\begin{aligned} Q_{\lambda, \rho}(u_\varepsilon) &= \frac{\int_D |\nabla(\rho^{-(n-2)/2} v_\varepsilon)|^2 \rho^{n-2} dx - \lambda \int_D (\rho^{-(n-2)/2} v_\varepsilon)^2 \rho^n dx}{\left(\int_D (\rho^{-(n-2)/2} v_\varepsilon)^{2^*} \rho^n dx\right)^{2/2^*}} \\ &= \frac{\int_D |\nabla v_\varepsilon|^2 dx + \frac{n(n-2)}{4} \int_D v_\varepsilon^2 \rho^2 dx - \lambda \int_D v_\varepsilon^2 \rho^2 dx}{\left(\int_D v_\varepsilon^{2^*} dx\right)^{2/2^*}}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Die drei Integrale in (5.30) werden im folgenden separat für ε nahe bei 0 berechnet.

1. $\boxed{\int_D v_\varepsilon^2 \rho^2 dx}$

Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$ so, daß $\varphi \equiv 1$ in $B_\delta = B_\delta(0)$ gilt. Außerdem ist $\rho(x) \geq \rho(0) = 2$ in D und somit

$$\begin{aligned} \int_D v_\varepsilon^2 \rho^2 dx &= \int_D \frac{\varphi^2}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} \rho^2 dx \\ &\geq 4 \int_{B_\delta} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} = 4|\partial B_1| \int_0^\delta \frac{r^{n-1} dr}{(\varepsilon + r^2)^{n-2}}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Für $\sqrt{\varepsilon} < \delta$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \frac{r^{n-1} dr}{(\varepsilon + r^2)^{n-2}} &= \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{r^{n-1} dr}{(\varepsilon + r^2)^{n-2}} + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^\delta \frac{r^{n-1} dr}{(\varepsilon + r^2)^{n-2}} \\ &\geq \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{r^{n-1} dr}{(2\varepsilon)^{n-2}} + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^\delta \frac{r^{n-1} dr}{(2r^2)^{n-2}} \\ &= 2^{2-n} \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \varepsilon^{2-n} r^{n-1} dr + 2^{2-n} \int_{\sqrt{\varepsilon}}^\delta r^{-n+3} dr \\ &=: 2^{2-n} I_1 + 2^{2-n} I_2. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Man errechnet

$$I_1 = \varepsilon^{2-n} [n^{-1} r^n]_0^{\sqrt{\varepsilon}} = n^{-1} \varepsilon^{-\frac{n-4}{2}}. \quad (5.33)$$

³ Für die ausführliche Berechnung des Gradiententerms sei auf Anhang A.1 verwiesen.

Weiter ist für $n = 4$

$$I_2 = [\ln r]_{\sqrt{\varepsilon}}^{\delta} = \ln \delta - \ln \sqrt{\varepsilon} = \ln \delta + \frac{1}{2} |\ln \varepsilon|, \quad (5.34)$$

da $\varepsilon < 1$ ist. Für $n \geq 5$ gilt

$$I_2 = \left[\frac{1}{4-n} r^{4-n} \right]_{\sqrt{\varepsilon}}^{\delta} = -\frac{1}{n-4} \delta^{4-n} + \frac{1}{n-4} \varepsilon^{-\frac{n-4}{2}}. \quad (5.35)$$

Aus den Formeln (5.31)–(5.35) folgt

$$\begin{aligned} & \int_D v_{\varepsilon}^2 \rho^2 dx \\ & \geq \begin{cases} 2^{4-n} |\partial B_1| \left\{ \frac{1}{n} + \ln \delta + \frac{1}{2} |\ln \varepsilon| \right\} & \text{für } n = 4 \\ 2^{4-n} |\partial B_1| \left\{ \frac{1}{n} \varepsilon^{-\frac{n-4}{2}} - \frac{1}{n-4} \delta^{4-n} + \frac{1}{n-4} \varepsilon^{-\frac{n-4}{2}} \right\} & \text{für } n \geq 5 \end{cases} \\ & = \begin{cases} C |\ln \varepsilon| + O(1) & \text{für } n = 4 \\ C \varepsilon^{-\frac{n-4}{2}} + O(1) & \text{für } n \geq 5 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.36)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$, wobei C jeweils eine positive Konstante bezeichnet.

2. $\boxed{\int_D v_{\varepsilon}^{2^*} dx}$

Das Integral läßt sich zerlegen in die drei Teile

$$\begin{aligned} \int_D v_{\varepsilon}^{2^*} dx &= \int_D \frac{\varphi^{2^*} - 1}{(\varepsilon + |x|^2)^n} dx + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^n} - \int_{\mathbb{R}^n \setminus D} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^n} \\ &=: I_3 + I_4 - I_5. \end{aligned}$$

Da D eine Kugel mit Mittelpunkt 0 ist, liegt die Verbindungsstrecke von 0 und x für jedes $x \in D$ in D , und die genügend glatte Funktion $\phi := \varphi^{2^*}$ kann in jedem Punkt $x \in D$ in ein Taylorpolynom $(n+1)$ ter Ordnung um 0 entwickelt werden. Es gilt

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \mathcal{D}^k \phi(0) x^k + \frac{1}{(n+2)!} \mathcal{D}^{n+2} \phi(\xi) x^{n+2},$$

wobei ξ auf der Verbindungsstrecke von 0 und x liegt. Weil $\varphi \equiv 1$ in einer Umgebung von 0 ist, verschwinden alle Ableitungen von ϕ im Punkt 0. Somit ist

$$|\varphi^{2^*}(x) - 1| = |\phi(x) - \phi(0)| = \left| \frac{1}{(n+2)!} \mathcal{D}^{n+2} \phi(\xi) x^{n+2} \right| \leq C |x|^{n+2}$$

für jedes $x \in D$ und eine genügend große, positive Konstante⁴ C . Eingesetzt in I_3 ergibt sich unter Berücksichtigung der Tatsache, daß gilt $D \subset B_1$

$$|I_3| \leq \int_D \frac{C|x|^{n+2}}{(\varepsilon + |x|^2)^n} dx \leq \tilde{C} \int_0^1 \frac{r^{n+2}}{(\varepsilon + r^2)^n} r^{n-1} dr.$$

Substituiert man $(\varepsilon + r^2) = s$ und ersetzt dann im Zähler $(s - \varepsilon)^n$ durch die Binomialentwicklung dieses Ausdrucks, so ist

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 \frac{r^{n+2}}{(\varepsilon + r^2)^n} r^{n-1} dr &= \int_\varepsilon^{1+\varepsilon} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \varepsilon^k s^{-k} ds \\ &= \int_\varepsilon^{1+\varepsilon} \left\{ \binom{n}{0} - \binom{n}{1} \frac{\varepsilon}{s} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (-1)^k \varepsilon^k s^{-k} \right\} ds \\ &= 1 - n\varepsilon \ln(1 + \varepsilon) + n\varepsilon \ln \varepsilon \\ &\quad + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{1-k} \left(\frac{\varepsilon^k}{(1+\varepsilon)^{k-1}} - \varepsilon \right) \\ &\rightarrow 1 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |I_3| \leq \hat{C} < \infty$$

und damit

$$I_3 = O(1) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.37)$$

Das Integral I_4 lautet in Polarkoordinaten

$$I_4 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^n} dx = |\partial B_1| \int_0^\infty \frac{r^{n-1} dr}{(\varepsilon + r^2)^n}.$$

Mit Hilfe der Substitution $r = \sqrt{\varepsilon} \tan t$, anschließender partieller Integration und [Bro, 21.6,16] erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{r^{n-1} dr}{(\varepsilon + r^2)^n} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\varepsilon}^{n-1} \tan^{n-1} t \sqrt{\varepsilon} (\tan t)' dt}{(\varepsilon + \varepsilon \tan^2 t)^n} \\ &= \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \cdot \frac{1}{n} (\tan^n t)' dt \\ &= \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} t \sin^{n+1} t dt \\ &= \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma(n+1)}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

⁴ Da D beschränkt und φ genügend glatt ist, kann man eine universelle Konstante C finden, so daß die Ungleichung für jedes $x \in D$ gilt.

Daher gilt unter Beachtung von $|\partial B_1| = n \cdot \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ (vergl. [Ev, Anhang A])

$$I_4 = |\partial B_1| \cdot \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\pi^{n/2}}{\varepsilon^{n/2}} \cdot \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)}. \quad (5.39)$$

Im dritten Integral substituiert man nach Übergang zu radialsymmetrischen Koordinaten mit $r = \sqrt{\varepsilon} s$, dann ist

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus D} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^n} \\ &= |\partial B_1| \int_R^\infty \frac{r^{n-1} dr}{(\varepsilon + r^2)^n} = |\partial B_1| \cdot \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \int_{R/\sqrt{\varepsilon}}^\infty \frac{s^{n-1} ds}{(1 + s^2)^n}. \end{aligned}$$

Der Nenner im letzten Integral läßt sich durch s^{2n} nach unten abschätzen. Dadurch wird I_5 nach oben abgeschätzt durch

$$\begin{aligned} I_5 &\leq |\partial B_1| \cdot \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \int_{R/\sqrt{\varepsilon}}^\infty s^{-n-1} ds \\ &= |\partial B_1| \cdot \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \cdot \left(0 + \frac{1}{n} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{R}\right)^n\right) \\ &= |\partial B_1| \cdot n^{-1} R^{-n}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$I_5 = O(1) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.40)$$

Mit (5.37), (5.39) und (5.40) folgt schließlich

$$\int_D v_\varepsilon^{2^*} dx = \frac{\pi^{n/2}}{\varepsilon^{n/2}} \cdot \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} + O(1) \quad (5.41)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$.

3. $\boxed{\int_D |\nabla v_\varepsilon|^2 dx}$

Nach Definition von v_ε ist

$$\nabla v_\varepsilon = \frac{\nabla \varphi}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}} - (n-2) \frac{x \cdot \varphi}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{n}{2}}}$$

und

$$|\nabla v_\varepsilon|^2 = \frac{|\nabla \varphi|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} - (n-2) \frac{x \cdot \nabla(\varphi^2)}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-1}} + (n-2)^2 \frac{|x|^2 \varphi^2}{(\varepsilon + |x|^2)^n}.$$

Integriert man den Ausdruck über D , folgt nach partieller Integration des mittleren Terms unter Beachtung der Tatsache, daß $\varphi = 0$ auf ∂D gilt,

$$\begin{aligned} \int_D |\nabla v_\varepsilon|^2 dx &= \int_D \frac{|\nabla \varphi|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} dx + (n-2) \int_D \frac{n\varepsilon - n|x|^2 + 2|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^n} \varphi^2 dx \\ &\quad + (n-2)^2 \int_D \frac{|x|^2 \varphi^2}{(\varepsilon + |x|^2)^n} dx \\ &= \int_D \frac{|\nabla \varphi|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} dx + n(n-2) \cdot \varepsilon \int_D \frac{\varphi^2}{(\varepsilon + |x|^2)^n} dx \\ &=: I_6 + I_7. \end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung von $|\nabla \varphi(x)|^2$ bis zur Ordnung $(n-1)$ um 0 liefert auf ähnliche Art und Weise wie oben

$$|\nabla \varphi(x)|^2 \leq C |x|^n$$

für $x \in D$ und eine geeignete Konstante $C > 0$. Somit ist

$$\begin{aligned} |I_6| &\leq C \int_D \frac{|x|^n}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}} dx \\ &= \tilde{C} \int_0^R \frac{r^n}{(\varepsilon + r^2)^{n-2}} r^{n-1} dr \leq \tilde{C} \int_0^1 \frac{r^{2n-1}}{(\varepsilon + r^2)^{n-2}} dr. \end{aligned}$$

Substituiert man wieder mit $(\varepsilon + r^2) = s$, benutzt die Binomialentwicklung von $(s - \varepsilon)^{n-1}$ und schätzt die Konstanten geeignet ab, folgt ähnlich wie bei der Berechnung von I_3 auf Seite 51

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |I_6| \leq \tilde{C} < \infty$$

und damit

$$I_6 = O(1) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.42)$$

Um das Integral I_7 zu berechnen, stellt man es als Summe von drei Integralen dar, von denen zwei bereits bekannt sind:

$$\begin{aligned} I_7 &= n(n-2) \cdot \varepsilon \int_D \frac{\varphi^2}{(\varepsilon + |x|^2)^n} dx \\ &= n(n-2) \cdot \varepsilon \int_D \frac{\varphi^2 - 1}{(\varepsilon + |x|^2)^n} dx + n(n-2) \cdot \varepsilon \int_D \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= n(n-2) \cdot \varepsilon \int_D \frac{\varphi^2 - 1}{(\varepsilon + |x|^2)^n} dx \\
 &\quad + n(n-2) \cdot \varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^n} - \int_{\mathbb{R}^n \setminus D} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^n} \right) \\
 &=: n(n-2) \cdot I_8 + n(n-2) \cdot \varepsilon (I_4 - I_5). \tag{5.43}
 \end{aligned}$$

Benutzt man erneut die Methode der Taylorentwicklung einer Funktion und entwickelt $\varphi^2(x)$ bis zur Ordnung $(n-3)$ um 0, so erhält man

$$|\varphi^2(x) - 1| \leq C |x|^{n-2}$$

für $x \in D$ und eine geeignete Konstante $C > 0$. Somit ist

$$|I_8| \leq \varepsilon \int_D \frac{C |x|^{n-2}}{(\varepsilon + |x|^2)^n} dx \leq \hat{C} \cdot \varepsilon \int_0^1 \frac{r^{n-2}}{(\varepsilon + r^2)^n} r^{n-1} dr.$$

Mit der Substitution $(\varepsilon + r^2) = s$ folgt

$$\begin{aligned}
 |I_8| &\leq \hat{C} \cdot \varepsilon \int_{\varepsilon}^{1+\varepsilon} \frac{(s-\varepsilon)^{n-2}}{s^n} ds \\
 &= \hat{C} \cdot \varepsilon \int_{\varepsilon}^{1+\varepsilon} s^{-n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} (-1)^k \varepsilon^k s^{n-2-k} ds \\
 &= \sum_{k=0}^{n-2} \tilde{C}_k (-1)^k \varepsilon^{k+1} (\varepsilon^{-1-k} - (1+\varepsilon)^{-1-k}) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-2} \tilde{C}_k (-1)^k \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^{k+1} \right).
 \end{aligned}$$

Also ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |I_8| \leq \tilde{C} < \infty$$

und damit

$$I_8 = O(1) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \tag{5.44}$$

Setzt man in (5.43) die Ausdrücke für I_8 , I_4 und I_5 aus den Formeln (5.44), (5.39) und (5.40) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 I_7 &= n(n-2) \cdot O(1) + n(n-2) \cdot \varepsilon \left(\frac{\pi^{n/2}}{\varepsilon^{n/2}} \cdot \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} + O(1) \right) \\
 &= O(1) + n(n-2) \pi^{n/2} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \varepsilon^{-\frac{n-2}{2}} + O(\varepsilon) \\
 &= n(n-2) \pi^{n/2} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \varepsilon^{-\frac{n-2}{2}} + O(1) \tag{5.45}
 \end{aligned}$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$, da der Term $O(1)$ den Term $O(\varepsilon)$ dominiert. Mit (5.42) und (5.45) folgt schließlich

$$\int_D |\nabla v_\varepsilon|^2 dx = n(n-2)\pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \varepsilon^{-\frac{n-2}{2}} + O(1) \quad (5.46)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Damit sind die drei im Quotienten (5.30) auftretenden Integrale für ε nahe bei 0 bestimmt. Setzt man die Ergebnisse aus (5.36), (5.41) und (5.46) ein und berücksichtigt, daß $\lambda > \frac{n(n-2)}{4}$ ist, ergibt sich für sehr kleine Werte von ε

1. für $n \geq 5$:

$$\begin{aligned} Q_{\lambda,\rho}(u_\varepsilon) &= \frac{\int_D |\nabla v_\varepsilon|^2 dx + \left(\frac{n(n-2)}{4} - \lambda\right) \cdot \int_D v_\varepsilon^2 \rho^2 dx}{\left(\int_D v_\varepsilon^{2^*} dx\right)^{2/2^*}} \\ &\leq \frac{n(n-2)\pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \varepsilon^{-\frac{n-2}{2}} + O(1) + \left(\frac{n(n-2)}{4} - \lambda\right) \cdot \left(C \varepsilon^{-\frac{n-4}{2}} + O(1)\right)}{\left(\frac{\pi^{n/2}}{\varepsilon^{n/2}} \cdot \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} + O(1)\right)^{2/2^*}} \\ &= \frac{n(n-2)\pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \varepsilon^{-\frac{n-2}{2}} + \left(\frac{n(n-2)}{4} - \lambda\right) \cdot C \varepsilon^{-\frac{n-4}{2}} + O(1)}{\pi^{\frac{n-2}{2}} \varepsilon^{-\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)}\right)^{(n-2)/n} \left(1 + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}})\right)^{(n-2)/n}} \\ &= \frac{n(n-2)\pi \left(\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)}\right)^{2/n} + \left(\frac{n(n-2)}{4} - \lambda\right) \cdot \tilde{C} \varepsilon + O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}})}{\left(1 + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}})\right)^{(n-2)/n}} \\ &= \left(S^* + \left(\frac{n(n-2)}{4} - \lambda\right) \tilde{C} \varepsilon + O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}})\right) \left(1 + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}})\right)^{-(n-2)/n}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

2. für $n = 4$:

$$\begin{aligned} Q_{\lambda,\rho}(u_\varepsilon) &= \frac{\int_D |\nabla v_\varepsilon|^2 dx + (2 - \lambda) \cdot \int_D v_\varepsilon^2 \rho^2 dx}{\left(\int_D v_\varepsilon^{2^*} dx\right)^{2/2^*}} \\ &\leq \frac{8\pi^2 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(4)} \varepsilon^{-1} + O(1) + (2 - \lambda) \cdot (C |\ln \varepsilon| + O(1))}{\left(\frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(4)} + O(1)\right)^{1/2}} \\ &= \left(S^* + (2 - \lambda) \tilde{C} \varepsilon |\ln \varepsilon| + O(\varepsilon)\right) \left(1 + O(\varepsilon^2)\right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Der Faktor $1/(1 + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}}))$ kann, da $\varepsilon \ll 1$ ist, formal in eine geometrische Reihe entwickelt werden. Man erhält

$$\left(\frac{1}{1 + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}})} \right)^{\frac{n-2}{2}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-O(\varepsilon^{\frac{n}{2}}))^k \right)^{\frac{n-2}{2}} = (1 + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}}))^{\frac{n-2}{2}}.$$

Entwickelt man weiter den Ausdruck in eine binomische Reihe, so folgt

$$\left(\frac{1}{1 + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}})} \right)^{\frac{n-2}{2}} = (1 + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}}))^{\frac{n-2}{2}} = 1 + O(\varepsilon^{\frac{n}{2}}).$$

Schlußendlich ist

$$Q_{\lambda,\rho}(u_\varepsilon) \leq \begin{cases} S^* + (2 - \lambda) C \varepsilon |\ln \varepsilon| + O(\varepsilon) & \text{für } n = 4 \\ S^* + \left(\frac{n(n-2)}{4} - \lambda \right) C \varepsilon + O(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}) & \text{für } n \geq 5 \end{cases} \quad (5.49)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$ mit positiven Konstanten C . Da nach Voraussetzung $\frac{n(n-2)}{4} - \lambda < 0$ ist, und der zweite Term für kleine ε den dritten Term dominiert, können wir schließen

$$Q_{\lambda,\rho}(u_\varepsilon) < S^* \quad (5.50)$$

falls ε klein genug ist und somit

$$S_{\lambda,\rho}(D) < S^*.$$

□

Bemerkung 5.16 Berechnet man die Integrale für $n = 3$ analog zu oben, so ergibt sich

$$Q_{\lambda,\rho}(u_\varepsilon) \leq S^* + \left(\lambda - \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{16\pi}{3} \varepsilon + O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Der Schluß $Q_{\lambda,\rho}(u_\varepsilon) < S^*$ ist nicht möglich, da das Vorzeichen des dritten Summanden nicht bekannt ist.

Man beachte dazu, daß das Integral I_2 auf Seite 49 für $n = 3$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ beschränkt bleibt.

Korollar 5.16 *Es sei $D' \subset \mathbb{H}^n$, $n \geq 4$ ein beschränktes Gebiet. Dann existiert ein $\lambda^* \leq \frac{n(n-2)}{4}$, so daß*

$$S_{\lambda,\rho}(D) < S^*$$

für jedes $\lambda > \lambda^$.*

Beweis: Es sei $\lambda > \frac{n(n-2)}{4}$. Es sei $y \in D$ ein harmonisches Zentrum von D und $R_h := r(y)$ der zugehörige harmonische Radius (vergl. Definition 4 auf Seite 18). Setzt man $\theta_h := 2 \operatorname{Artanh} R_h$, entspricht die geodätische Kugel $\mathfrak{B}_{\theta_h}(0)$ der euklidischen Kugel $B_{R_h}(0)$. Mit Lemma 5.15 folgt

$$S_{\lambda,\rho}(B_{R_h}) < S^*,$$

und das Lemma über konzentrierte Kompaktheit (Lemma 5.11) sichert, daß ein Minimierer $u_M \in H_0^{1,2}(B_{R_h})$ von $S_{\lambda,\rho}(B_{R_h})$ existiert.

Mit einem Symmetrisierungsargument folgt, daß u_M ohne Beschränkung der Allgemeinheit radialsymmetrisch und monoton fallend ist. Definiert man wie im Beweis von Lemma 4.2 auf Seite 24 die harmonische Verpflanzung U_M von u_M nach D mit Zentrum $y \in D$, so gilt (vergl. Lemma 3.2 auf Seite 19)

$$\begin{aligned} S^* &> S_{\lambda,\rho}(B_{R_h}) \\ &= \frac{\int_{B_{R_h}} |\nabla u_M|^2 \rho^{n-2} dx - \lambda \int_{B_{R_h}} u_M^2 \rho^n dx}{\left(\int_{B_{R_h}} |u_M|^{2^*} \rho^n dx \right)^{2/2^*}} \\ &\geq \frac{\int_D |\nabla U_M|^2 \rho^{n-2} dx - \lambda \int_D U_M^2 \rho^n dx}{\left(\int_D |U_M|^{2^*} \rho^n dx \right)^{2/2^*}} \\ &\geq S_{\lambda,\rho}(D). \end{aligned} \tag{5.51}$$

Damit ist $S_{\lambda,\rho}(D) < S^*$ für alle $\lambda > \frac{n(n-2)}{4}$.

Insbesondere läßt die Ungleichung $S_{\lambda,\rho}(B_{R_h}) \geq S_{\lambda,\rho}(D)$ zu, daß ein $\lambda^* \leq \frac{n(n-2)}{4}$ existiert mit $S_{\lambda,\rho}(D) < S^*$ für alle $\lambda > \lambda^*$. \square

Wir beweisen nun den Hauptsatz dieses Abschnitts:

Beweis: (von Satz 5)

zu (ii):

Die Nichtexistenz einer Lösung für $\lambda \geq \lambda_1$ ist in Lemma 5.12 auf Seite 44 gezeigt worden.

zu (iii):

Die Nichtexistenz einer Lösung für $\lambda \leq \frac{n(n-2)}{4}$ folgt aus Korollar 5.14 auf Seite 46.

zu (i):

Nach Korollar 5.16 existiert ein $\lambda^* \leq \frac{n(n-2)}{4}$ so, daß $S_{\lambda,\rho}(D) < S^*$ für alle $\lambda > \lambda^*$. Daraus folgt mit dem Lemma über konzentrierte Kompaktheit (Lemma 5.11) für jedes $\lambda > \lambda^*$ die Existenz eines Minimierers $u \in H_0^{1,2}(D)$ von $S_{\lambda,\rho}(D)$.

Nach Abschnitt 5.1.4 ist für $\lambda < \lambda_1$ jeder Minimierer nach geeigneter Skalierung eine schwache Lösung des Brézis-Nirenberg Problems. Damit ist die Existenz einer

schwachen Lösung für $\lambda^* < \lambda < \lambda_1$ bewiesen.

Mit Satz 4 auf Seite 34 folgt, daß jede schwache Lösung $u \in H_0^{1,2}(D')$ des Brézis-Nirenberg Problems auch eine klassische Lösung $u \in C^2(\overline{D'})$ ist.

Zu zeigen bleibt, daß gilt $\lambda^* = \frac{n(n-2)}{4}$. Dies folgt sofort, denn falls $\lambda^* < \frac{n(n-2)}{4}$ gelten würde, wäre dies ein Widerspruch zu (iii), also ist $\lambda^* = \frac{n(n-2)}{4}$ und der Satz ist bewiesen. \square

Die Resultate des Satzes 5 lassen wie folgt graphisch darstellen:

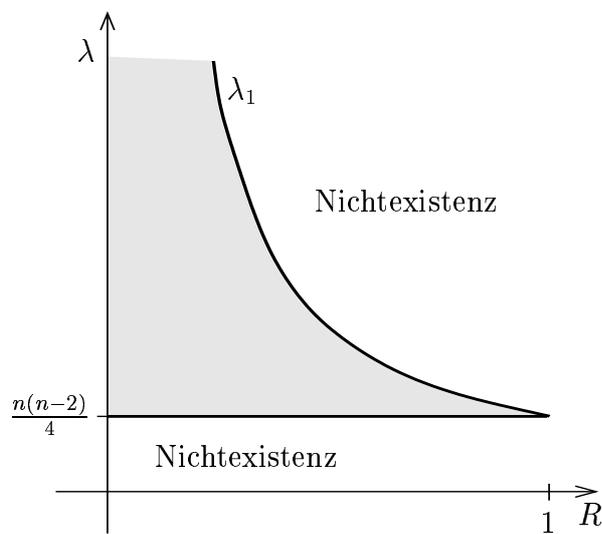


Abbildung 5.1: Existenz von Lösungen für $n \geq 4$ auf Kugeln

5.4 Der Fall $n = 3$

Wie auch im euklidischen Fall (vergl. [BN]) können wir die Frage nach der Existenz von Lösungen des Brézis-Nirenberg Problems in Raumdimension 3 nur komplett beantworten, wenn das Grundgebiet eine Kugel ist.

Daher beschränken wir uns im nächsten Teilabschnitt auf geodätische Kugeln $D' \subset \mathbb{H}^3$ und formulieren Ergebnisse für allgemeinere Gebiete im Anschluß daran.

5.4.1 Das Brezis-Nirenberg Problem auf Kugeln

Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist

Satz 6 (Existenz und Nichtexistenz von Lösungen für $n = 3$)

Es sei $D' \subset \mathbb{H}^3$ eine geodätische Kugel mit Radius $\theta \in (0, \infty)$. Dann gilt:

- (i) Für jedes $\lambda \in \left(1 + \frac{\pi^2}{4\theta^2}, 1 + \frac{\pi^2}{\theta^2}\right)$ existiert eine Lösung $u \in C^2(\overline{D'})$ des Brézis-Nirenberg Problems (BN).
- (ii) Für $\lambda \geq 1 + \frac{\pi^2}{\theta^2}$ existiert keine Lösung des Problems (BN).
- (iii) Für $\lambda \leq 1 + \frac{\pi^2}{4\theta^2}$ existiert keine Lösung des Problems (BN).

Bemerkung 5.17 Die obere Grenze des Existenzbereichs entspricht dem in Kapitel 4 ausgerechneten ersten Dirichlet-Eigenwert λ_1 des Laplace-Beltrami-Operators $-\Delta_{\mathbb{H}^3}$ auf $\mathfrak{B}_\theta(0)$.

Bemerkung 5.18 Die Nichtexistenz einer Lösung für $\lambda \leq \frac{n(n-2)}{4}$ ist bereits in Lemma 5.13 gezeigt worden.

Für $n \geq 4$ stimmt der Wert $\frac{n(n-2)}{4}$ mit der unteren Grenze des Existenzbereichs von Lösungen überein (vergl. Satz 5 auf Seite 48). Für $n = 3$ gilt

$$\frac{n(n-2)}{4} = \frac{3}{4} < 1 + \frac{\pi^2}{4\theta^2},$$

der Existenzbereich ist „kleiner“ als für $n \geq 4$ und außerdem gebietsabhängig.

Um Satz 6 zu beweisen, werden noch mehrere Lemmata benötigt, die im folgenden bereitgestellt werden.

Lemma 5.17 Es sei $\varphi_1(r) := (1 - r^2) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\operatorname{Artanh} r}{\operatorname{Artanh} R}\right)$ auf $[0, R] \subset [0, 1)$. Dann gilt

$$\int_0^R \rho(\varphi_1')^2 dr + \int_0^R \rho^2 \varphi_1^2 dr = \left(1 + \frac{\pi^2}{16 \operatorname{Artanh}^2 R}\right) \int_0^R \rho^3 \varphi_1^2 dr.$$

Beweis: Wir betrachten das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem

$$-(\rho(r)\varphi')' + \rho^2(r)\varphi = \mu\rho^3(r)\varphi \quad \text{in } (0, R) \quad (5.52)$$

$$\varphi'(0) = 0, \quad \varphi(R) = 0. \quad (5.53)$$

Da die Koeffizienten genügend glatt sind, ist jeder Eigenwert einfach, und die erste Eigenfunktion hat nur ein Vorzeichen (vergl. zum Beispiel [Wa, § 27]).

Mit Hilfe von Maple findet man für

$$\mu = 1 + \frac{\pi^2}{16 \operatorname{Artanh}^2 R} \quad (5.54)$$

eine Lösung des Problems (5.52)–(5.53), nämlich

$$\varphi_1(r) = (1 - r^2) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\operatorname{Artanh} r}{\operatorname{Artanh} R}\right). \quad (5.55)$$

Die Funktion φ_1 ist offensichtlich beliebig oft stetig differenzierbar in $(0, R) \subset (0, 1)$ und positiv. Daß die Funktion φ_1 bei obiger Wahl von μ auch eine Lösung der Differentialgleichung (5.52) ist und die Randbedingungen (5.53) erfüllt, rechnet man leicht nach. Also ist φ_1 eine Eigenfunktion zum Eigenwert μ . Genauer muß es sich um die erste Eigenfunktion handeln, da nur diese keinen Vorzeichenwechsel in $(0, R)$ hat.

Multipliziert man schließlich die Differentialgleichung für φ_1 mit φ_1 und integriert über $(0, R)$, so folgt nach partieller Integration des ersten Terms

$$\int_0^R \rho(\varphi_1')^2 dr + \int_0^R \rho^2 \varphi_1^2 dr = \left(1 + \frac{\pi^2}{16 \operatorname{Artanh}^2 R}\right) \int_0^R \rho^3 \varphi_1^2 dr.$$

□

Lemma 5.18 *Es sei $D' = \mathfrak{B}_\theta(0) \subset \mathbb{H}^3$ eine geodätische Kugel um 0 mit Radius $\theta \in (0, \infty)$ und $R := \tanh \frac{\theta}{2}$. Für jedes $\lambda > 1 + \frac{\pi^2}{4\theta^2} = 1 + \frac{\pi^2}{16 \operatorname{Artanh}^2 R}$ gilt dann*

$$S_{\lambda, \rho}(D) < S^*.$$

Bemerkung 5.19 Die geodätische Kugel $D' = \mathfrak{B}_\theta(0) \subset \mathbb{H}^3$ entspricht in euklidischen Koordinaten der Menge $D = B_R(0) = B_R \subset B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$.

Beweis: Wir schätzen den Quotienten

$$Q_{\lambda, \rho}(u) = \frac{\int_D |\nabla u|^2 \rho dx - \lambda \int_D u^2 \rho^3 dx}{\left(\int_D |u|^6 \rho^3 dx\right)^{1/3}} \quad (5.56)$$

geeignet ab. Dazu sei für $\varepsilon > 0$ und $r \in [0, R]$

$$v_\varepsilon(r) := \frac{\varphi(r)}{(\varepsilon + r^2)^{1/2}},$$

wobei φ eine genügend glatte Funktion auf $[0, R]$ mit den Eigenschaften

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(R) = 0$$

ist. Für $x \in D = B_R$ sei

$$u_\varepsilon(x) := v_\varepsilon(|x|).$$

Setzt man u_ε in den obigen Quotienten ein, so folgt

$$\begin{aligned} Q_{\lambda, \rho}(u_\varepsilon) &= \frac{\int_D |\nabla u_\varepsilon|^2 \rho \, dx - \lambda \int_D u_\varepsilon^2 \rho^3 \, dx}{\left(\int_D u_\varepsilon^6 \rho^3 \, dx\right)^{1/3}} \\ &= \frac{4\pi \int_0^R |v'_\varepsilon(r)|^2 \rho(r) r^2 \, dr - \lambda \cdot 4\pi \int_0^R v_\varepsilon^2(r) \rho^3(r) r^2 \, dr}{\left(4\pi \int_0^R v_\varepsilon^6(r) \rho^3(r) r^2 \, dr\right)^{1/3}}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Die drei Integrale in (5.57) werden separat für ε nahe bei 0 berechnet.

$$1. \quad \boxed{\int_0^R v_\varepsilon^2 \rho^3 r^2 \, dr}$$

Das Integral läßt sich zerlegen in die zwei Teile

$$\begin{aligned} \int_0^R v_\varepsilon^2 \rho^3 r^2 \, dr &= \int_0^R \varphi^2(r) \rho^3(r) \, dr - \int_0^R \varphi^2(r) \frac{\varepsilon}{(\varepsilon + r^2)} \rho^3(r) \, dr \\ &=: J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (5.58)$$

J_1 ist unabhängig von ε und wird nicht weiter umgeformt. Mit Hilfe der Substitution $r = \sqrt{\varepsilon} s$ im Integral J_2 erhält man

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^{R/\sqrt{\varepsilon}} \varphi^2(\sqrt{\varepsilon} s) \frac{\varepsilon}{(\varepsilon + \varepsilon s^2)} \rho^3(\sqrt{\varepsilon} s) \sqrt{\varepsilon} \, ds \\ &= \sqrt{\varepsilon} \int_0^{R/\sqrt{\varepsilon}} \varphi^2(\sqrt{\varepsilon} s) \cdot \frac{1}{(1 + s^2)} \cdot \frac{8}{(1 - \varepsilon s^2)^3} \, ds. \end{aligned}$$

Da φ eine genügend glatte Funktion auf dem kompakten Intervall $[0, R]$ ist, gilt

$$\left| \frac{J_2}{\varepsilon^{1/2}} \right| \leq \int_0^{R/\sqrt{\varepsilon}} |\varphi(\sqrt{\varepsilon} s)|^2 \cdot \frac{1}{(1 + s^2)} \cdot \frac{8}{(1 - \varepsilon s^2)^3} \, ds$$

$$\leq C \int_0^{R/\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{(1+s^2)} \cdot \frac{1}{(1-\varepsilon s^2)^3} ds$$

für eine geeignete Konstante $C > 0$. Substituiert man mit $s = \frac{R}{\sqrt{\varepsilon}} t$ und beachtet, daß für $t \in [0, 1]$ gilt $\frac{1}{1-R^2 t^2} \leq \frac{1}{1-R^2}$, so folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{J_2}{\varepsilon^{1/2}} \right| &\leq C \int_0^1 \frac{1}{(1+\varepsilon^{-1}R^2 t^2)(1-R^2 t^2)^3} \cdot \frac{R}{\sqrt{\varepsilon}} dt \\ &\leq C \cdot \frac{R}{(1-R^2)^3} \int_0^1 \frac{1}{(1+\varepsilon^{-1}R^2 t^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} dt \\ &= \tilde{C} \cdot \sqrt{\varepsilon} \int_0^1 \frac{dt}{(\sqrt{\varepsilon}R^{-1})^2 + t^2} \\ &= \tilde{C} \cdot R \cdot \arctan \frac{R}{\sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Da $\arctan x < \frac{\pi}{2}$ für alle $x > 0$ ist, ergibt sich

$$\left| \frac{J_2}{\varepsilon^{1/2}} \right| \leq \tilde{C} \cdot R \cdot \frac{\pi}{2} < \infty \quad \text{für alle } \varepsilon > 0$$

und somit

$$J_2 = O(\varepsilon^{1/2}) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.59)$$

Mit (5.58) und (5.59) folgt schließlich

$$\int_0^R v_\varepsilon^2 \rho^3 r^2 dr = \int_0^R \varphi^2 \rho^3 dr + O(\varepsilon^{1/2}) \quad (5.60)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. $\boxed{\int_0^R v_\varepsilon^6 \rho^3 r^2 dr}$

Dieses Integral läßt sich aufspalten in die drei Teile

$$\begin{aligned} \int_0^R v_\varepsilon^6 \rho^3 r^2 dr &= \int_0^R \frac{\varphi^6(r) \rho^3(r)}{(\varepsilon + r^2)^3} r^2 dr \\ &= \int_0^R \frac{\varphi^6(r) - 1}{(\varepsilon + r^2)^3} \rho^3(r) r^2 dr + \int_0^R \frac{\rho^3(r) - 8}{(\varepsilon + r^2)^3} r^2 dr \\ &\quad + \int_0^R \frac{8}{(\varepsilon + r^2)^3} r^2 dr \\ &=: J_3 + J_4 + J_5. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Nach Voraussetzung ist $\varphi'(0) = 0$. Daher kann die genügend glatte Funktion $\phi := \varphi^6$ in jedem Punkt $r \in (0, R)$ in ein Taylorpolynom 1. Ordnung um 0 entwickelt werden. Es gilt $\phi(r) = \phi(0) + \phi'(0)r + \frac{1}{2}\phi''(\xi)r^2$ für ein $\xi \in (0, r)$. Folglich ist

$$|\varphi^6(r) - 1| = |\phi(r) - \phi(0)| = |\phi'(0)r + \frac{1}{2}\phi''(\xi)r^2| = \frac{|\phi''(\xi)|}{2}r^2 \leq Cr^2$$

für jedes $r \in (0, R)$ und eine genügend große, positive Konstante C . Außerdem gilt $8 < \rho^3(r) < \frac{8}{(1-R^2)^3} = \hat{C} < \infty$ für $r \in (0, R)$ und somit ist

$$\begin{aligned} \left| \frac{J_3}{\varepsilon^{-1/2}} \right| &\leq \sqrt{\varepsilon} \int_0^R \frac{|\varphi^6(r) - 1|}{(\varepsilon + r^2)^3} \rho^3(r) r^2 dr \\ &\leq \sqrt{\varepsilon} \cdot \tilde{C} \int_0^R \frac{r^4}{(\varepsilon + r^2)^3} dr. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Substituiert man mit $r = \sqrt{\varepsilon}s$ und schätzt das Integral durch Vergrößerung des Integrationsbereichs nach oben ab, so erhält man

$$\begin{aligned} \left| \frac{J_3}{\varepsilon^{-1/2}} \right| &\leq \sqrt{\varepsilon} \cdot \tilde{C} \int_0^{R/\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varepsilon^2 s^4}{(\varepsilon + \varepsilon s^2)^3} \sqrt{\varepsilon} ds \\ &\leq \tilde{C} \int_0^\infty \frac{s^4}{(1 + s^2)^3} ds \\ &= \tilde{C} \cdot \frac{3\pi}{16} < \infty. \end{aligned}$$

Es folgt

$$J_3 = O(\varepsilon^{-1/2}) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.63)$$

Weiter gilt für $r \in (0, R)$

$$|\rho^3(r) - 8| = r^2 \cdot \frac{|24 - 24r^2 + 8r^4|}{(1 - r^2)^3} \leq r^2 \cdot \frac{24 + 24R^2 + 8R^4}{(1 - R^2)^3} = Cr^2$$

wobei C eine positive Konstante ist. Es folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{J_4}{\varepsilon^{-1/2}} \right| &\leq \sqrt{\varepsilon} \cdot \int_0^R \frac{|\rho^3(r) - 8|}{(\varepsilon + r^2)^3} r^2 dr \\ &\leq \sqrt{\varepsilon} \cdot C \int_0^R \frac{r^4}{(\varepsilon + r^2)^3} dr. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist bereits bei der Berechnung von J_3 (vergl. Formel (5.62)) durch $C \cdot 3\pi/16$ nach oben abgeschätzt worden. Also gilt

$$\left| \frac{J_4}{\varepsilon^{-1/2}} \right| \leq C \cdot \frac{3\pi}{16} < \infty$$

und

$$J_4 = O(\varepsilon^{-1/2}) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.64)$$

Im Integral J_5 substituiert man zunächst $r = \sqrt{\varepsilon}s$ und zerlegt es dann in zwei Teilintegrale.

$$\begin{aligned} J_5 &= \int_0^R \frac{8}{(\varepsilon + r^2)^3} r^2 dr \\ &= \int_0^{R/\sqrt{\varepsilon}} \frac{8}{(\varepsilon + \varepsilon s^2)^3} \varepsilon s^2 \sqrt{\varepsilon} ds \\ &= \frac{8}{\varepsilon^{3/2}} \cdot \left\{ \int_0^\infty \frac{s^2}{(1 + s^2)^3} ds - \int_{R/\sqrt{\varepsilon}}^\infty \frac{s^2}{(1 + s^2)^3} ds \right\} \\ &=: \frac{8}{\varepsilon^{3/2}} \cdot \{J_6 + J_7\}. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Für das Integral J_6 gilt mit [Bro, 21.5,67]

$$J_6 = \int_0^\infty \frac{s^2}{(1 + s^2)^3} ds = \frac{\pi}{16}. \quad (5.66)$$

Substituiert man im Integral J_7 mit $s = \frac{R}{\sqrt{\varepsilon}}t$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} J_7 &= \int_1^\infty \frac{\varepsilon^{-1}R^2t^2}{(1 + \varepsilon^{-1}R^2t^2)^3} \varepsilon^{-1/2}R dt \\ &= \frac{\varepsilon^{3/2}}{R^3} \int_1^\infty \frac{t^2}{(\varepsilon R^{-2} + t^2)^3} dt. \end{aligned}$$

Da εR^{-2} positiv ist, kann man im Integral den Nenner nach unten abschätzen durch t^2 . Es folgt

$$\left| \frac{J_7}{\varepsilon^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{R^3} \int_1^\infty \frac{t^2}{(t^2)^3} dt = \frac{1}{R^3} \int_1^\infty t^{-4} dt = \frac{1}{R^3} \cdot \frac{1}{3} < \infty$$

und

$$J_7 = O(\varepsilon^{3/2}) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.67)$$

Mit den Formeln (5.65)–(5.67) erhält man

$$J_5 = \frac{8}{\varepsilon^{3/2}} \cdot \left\{ \frac{\pi}{16} + O(\varepsilon^{3/2}) \right\} = \frac{\pi}{2\varepsilon^{3/2}} + O(1) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.68)$$

Setzt man in (5.61) die Ausdrücke für J_3 , J_4 und J_5 aus den Formeln (5.63), (5.64) und (5.68) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^R v_\varepsilon^6 \rho^3 r^2 dr &= O(\varepsilon^{-1/2}) + O(\varepsilon^{-1/2}) + \frac{\pi}{2\varepsilon^{3/2}} + O(1) \\ &= \frac{\pi}{2\varepsilon^{3/2}} + O(\varepsilon^{-1/2}) \end{aligned} \quad (5.69)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$, da der Term $O(\varepsilon^{-1/2})$ den Term $O(1)$ dominiert.

3. $\boxed{\int_0^R |v'_\varepsilon|^2 \rho r^2 dr}$

Nach Definition von v_ε ist

$$v'_\varepsilon = \varphi' \cdot (\varepsilon + r^2)^{-1/2} - \varphi \cdot r \cdot (\varepsilon + r^2)^{-3/2}$$

und

$$|v'_\varepsilon|^2 = \frac{(\varphi')^2}{(\varepsilon + r^2)} - \frac{r \cdot (\varphi^2)'}{(\varepsilon + r^2)^2} + \frac{r^2 \varphi^2}{(\varepsilon + r^2)^3}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in das Integral ein, integriert den mittleren Term partiell, beachtet dabei $\varphi(R) = 0$ und faßt die Terme geeignet zusammen, so folgt

$$\begin{aligned} \int_0^R |v'_\varepsilon|^2 \rho r^2 dr &= \int_0^R \frac{(\varphi')^2}{(\varepsilon + r^2)} \rho r^2 dr + \int_0^R \frac{\varphi^2 \rho' r^3}{(\varepsilon + r^2)^2} dr + \int_0^R \frac{3\varepsilon \varphi^2 \rho r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr \\ &= \int_0^R (\varphi')^2 \rho dr + \int_0^R \frac{(-\varepsilon) (\varphi')^2 \rho}{(\varepsilon + r^2)} dr \\ &\quad + \int_0^R \varphi^2 \rho^2 dr + \int_0^R \frac{\varphi^2 \rho^2 (-\varepsilon^2 - 2\varepsilon r^2)}{(\varepsilon + r^2)^2} dr \\ &\quad + \int_0^R \frac{3\varepsilon \varphi^2 \rho r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr \\ &=: J_8 + J_9 + J_{10} + J_{11} + J_{12}. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Die von ε unabhängigen Integrale J_8 und J_{10} werden nicht weiter umgeformt. Um das Integral J_9 abzuschätzen, benutzt man erneut die Methode der Taylorentwicklung einer Funktion und entwickelt $(\varphi')^2$ bis zur ersten Ordnung um 0. Man erhält

$$|\varphi'(r)|^2 \leq Cr^2$$

für $r \in (0, R)$ und eine geeignete Konstante $C > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{J_9}{\varepsilon} \right| &\leq \int_0^R \frac{|\varphi'|^2 \rho}{(\varepsilon + r^2)} dr \\
 &\leq \tilde{C} \cdot \int_0^R \frac{r^2}{(1-r^2)(\varepsilon + r^2)} dr \\
 &= \tilde{C} \cdot \int_0^R \left\{ \frac{1}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1}{1-r^2} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1}{((\sqrt{\varepsilon})^2 + r^2)} \right\} dr \\
 &= \tilde{C} \cdot \left\{ \frac{1}{1+\varepsilon} \operatorname{Artanh} R - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon} \arctan \frac{R}{\sqrt{\varepsilon}} \right\} \\
 &\leq \tilde{C} \cdot \operatorname{Artanh} R + \tilde{C} \cdot \frac{\pi}{2} < \infty
 \end{aligned}$$

und schließlich ist

$$J_9 = O(\varepsilon) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.71)$$

Um das Integral J_{11} zu bestimmen, nutzt man zunächst die Stetigkeit von φ und ρ auf dem Intervall $[0, R]$ aus. Es gilt

$$|J_{11}| \leq \int_0^R \frac{\varphi^2 \rho^2 (\varepsilon^2 + 2\varepsilon r^2)}{(\varepsilon + r^2)^2} dr \leq C \int_0^R \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon r^2}{(\varepsilon + r^2)^2} dr$$

für eine positive Konstante C . Substituiert man erneut mit $r = \sqrt{\varepsilon} s$, so folgt

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{J_{11}}{\varepsilon^{1/2}} \right| &\leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{R/\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon^2 s^2}{(\varepsilon + \varepsilon s^2)^2} \sqrt{\varepsilon} ds \\
 &\leq C \int_0^\infty \frac{1 + 2s^2}{(1 + s^2)^2} ds \\
 &= C \int_0^\infty \left\{ \frac{2}{1 + s^2} - \frac{1}{(1 + s^2)^2} \right\} ds \\
 &\leq C \cdot \pi + C \cdot \frac{\pi}{4} < \infty.
 \end{aligned}$$

Also ist

$$J_{11} = O(\varepsilon^{1/2}) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.72)$$

Das Integral J_{12} läßt sich schreiben als

$$\begin{aligned}
 J_{12} &= \int_0^R \frac{3\varepsilon \varphi^2 \rho r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr \\
 &= \int_0^R \frac{6\varepsilon r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr + \int_0^R \frac{3\varepsilon (\varphi^2 \rho - 2)r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr \\
 &=: J_{13} + J_{14}.
 \end{aligned} \quad (5.73)$$

Benutzt man im Integral J_{13} die Substitution $r = \sqrt{\varepsilon}s$, so folgt

$$J_{13} = \int_0^{R/\sqrt{\varepsilon}} \frac{6\varepsilon^2 s^2}{(\varepsilon + \varepsilon s^2)^3} \sqrt{\varepsilon} ds = \frac{6}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{R/\sqrt{\varepsilon}} \frac{s^2}{(1 + s^2)^3} ds.$$

Dieses Integral ist bei der Berechnung von J_5 bereits bestimmt worden, es ergibt sich mit den Formeln (5.65) und (5.68)

$$J_{13} = \frac{6}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{\varepsilon^{3/2}}{8} J_5 = \frac{6}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \left\{ \frac{\pi}{16} + O(\varepsilon^{3/2}) \right\} = \frac{3\pi}{8\sqrt{\varepsilon}} + O(\varepsilon). \quad (5.74)$$

Entwickelt man die Funktion $\varphi^2 \rho$ in ein Taylorpolynom erster Ordnung um 0, so folgt für alle $r \in (0, R)$

$$|\varphi^2(r) \rho(r) - 2| = |\varphi^2(r) \rho(r) - \varphi^2(0) \rho(0)| \leq Cr^2$$

mit einer genügend großen, positiven Konstante C . Für das Integral J_{14} gilt somit

$$\left| \frac{J_{14}}{\varepsilon^{1/2}} \right| \leq 3\sqrt{\varepsilon} \int_0^R \frac{|\varphi^2 \rho - 2| r^2}{(\varepsilon + r^2)^3} dr \leq \tilde{C} \cdot \sqrt{\varepsilon} \int_0^R \frac{r^4}{(\varepsilon + r^2)^3} dr.$$

Dieser Ausdruck ist bereits aus der Berechnung von J_3 (vergl. Formel (5.62)) bekannt. Es folgt

$$\left| \frac{J_{14}}{\varepsilon^{1/2}} \right| \leq \tilde{C} \cdot \frac{3\pi}{16} < \infty$$

und

$$J_{14} = O(\varepsilon^{1/2}) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.75)$$

Mit den Formeln (5.73), (5.74) und (5.75) erhält man

$$J_{12} = \frac{3\pi}{8\sqrt{\varepsilon}} + O(\varepsilon) + O(\varepsilon^{1/2}) = \frac{3\pi}{8\sqrt{\varepsilon}} + O(\varepsilon^{1/2}) \quad (5.76)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$, da der Term $O(\varepsilon^{1/2})$ den Term $O(\varepsilon)$ dominiert.

Setzt man schließlich die Ausdrücke für J_9 , J_{11} und J_{12} aus den Formeln (5.71), (5.72) und (5.76) in die Gleichung (5.70) ein, so folgt

$$\begin{aligned} & \int_0^R |v'_\varepsilon|^2 \rho r^2 dr \\ &= \int_0^R (\varphi')^2 \rho dr + O(\varepsilon) + \int_0^R \varphi^2 \rho^2 dr + O(\varepsilon^{1/2}) + \frac{3\pi}{8\sqrt{\varepsilon}} + O(\varepsilon^{1/2}) \\ &= \frac{3\pi}{8\sqrt{\varepsilon}} + \int_0^R (\varphi')^2 \rho dr + \int_0^R \varphi^2 \rho^2 dr + O(\varepsilon^{1/2}) \quad (5.77) \end{aligned}$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Damit sind die drei im Quotienten (5.57) auftretenden Integrale für ε nahe bei 0 bestimmt. Setzt man die Ergebnisse aus (5.60), (5.69) und (5.77) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 Q_{\lambda,\rho}(u_\varepsilon) &= \frac{4\pi \int_0^R |v'_\varepsilon|^2 \rho r^2 dr - \lambda \cdot 4\pi \int_0^R v_\varepsilon^2 \rho^3 r^2 dr}{\left(4\pi \int_0^R v_\varepsilon^6 \rho^3 r^2 dr\right)^{1/3}} \\
 &= \frac{\frac{3\pi^2}{2\sqrt{\varepsilon}} + 4\pi \left\{ \int_0^R (\varphi')^2 \rho dr + \int_0^R \varphi^2 \rho^2 dr - \lambda \int_0^R \varphi^2 \rho^3 dr \right\} + O(\varepsilon^{1/2})}{\left(\frac{2\pi^2}{\varepsilon^{3/2}} + O(\varepsilon^{-1/2})\right)^{1/3}} \\
 &= \frac{\frac{3\pi^2}{2\sqrt{\varepsilon}} + F(\varphi, \lambda) + O(\varepsilon^{1/2})}{\left(\frac{2\pi^2}{\varepsilon^{3/2}}\right)^{1/3} (1 + O(\varepsilon))^{1/3}}
 \end{aligned}$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$, wobei

$$F(\varphi, \lambda) := 4\pi \left\{ \int_0^R (\varphi')^2 \rho dr + \int_0^R \varphi^2 \rho^2 dr - \lambda \int_0^R \varphi^2 \rho^3 dr \right\}. \quad (5.78)$$

Vereinfacht man den Ausdruck für $Q_{\lambda,\rho}(u_\varepsilon)$ weiter, so folgt

$$Q_{\lambda,\rho}(u_\varepsilon) = \left(3 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{4/3} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{(2\pi^2)^{1/3}} F(\varphi, \lambda) + O(\varepsilon) \right) \cdot \left(\frac{1}{1 + O(\varepsilon)} \right)^{1/3}.$$

Der Term $\frac{1}{1+O(\varepsilon)}$ kann, da $\varepsilon \ll 1$ ist, formal in eine geometrische Reihe entwickelt werden. Man berechnet

$$\frac{1}{1 + O(\varepsilon)} = \frac{1}{1 - O(\varepsilon)} = \sum_{k=0}^{\infty} (O(\varepsilon))^k = 1 + O(\varepsilon).$$

Daraus folgt mit Hilfe der binomischen Reihenentwicklung

$$\left(\frac{1}{1 + O(\varepsilon)} \right)^{1/3} = (1 + O(\varepsilon))^{1/3} = 1 + O(\varepsilon).$$

Also ist

$$\begin{aligned}
 Q_{\lambda,\rho}(u_\varepsilon) &= 3 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{4/3} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{(2\pi^2)^{1/3}} F(\varphi, \lambda) + O(\varepsilon) \\
 &= S^* + \frac{\varepsilon^{1/2}}{(2\pi^2)^{1/3}} F(\varphi, \lambda) + O(\varepsilon)
 \end{aligned} \quad (5.79)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Wir wählen jetzt $\varphi(r) := \varphi_1(r) = (1 - r^2) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\operatorname{Artanh} r}{\operatorname{Artanh} R}\right)$. Die Funktion φ_1 erfüllt die Randbedingungen $\varphi_1(0) = 1$, $\varphi_1(R) = 0$ und $\varphi_1'(0) = 0$ und ist außerdem beliebig oft stetig differenzierbar. Mit Lemma 5.17 folgt

$$\begin{aligned} F(\varphi_1, \lambda) &= 4\pi \left(\int_0^R (\varphi_1')^2 \rho \, dr + \int_0^R \varphi_1^2 \rho^2 \, dr - \lambda \int_0^R \varphi_1^2 \rho^3 \, dr \right) \\ &= 4\pi \left(\left(1 + \frac{\pi^2}{16 \operatorname{Artanh}^2 R}\right) \int_0^R \varphi_1^2 \rho^3 \, dr - \lambda \int_0^R \varphi_1^2 \rho^3 \, dr \right) \\ &= 4\pi \left(1 + \frac{\pi^2}{16 \operatorname{Artanh}^2 R} - \lambda\right) \int_0^R \varphi_1^2 \rho^3 \, dr. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Somit ist

$$\begin{aligned} Q_{\lambda, \rho}(u_\varepsilon) &= S^* + \frac{\varepsilon^{1/2}}{(2\pi^2)^{1/3}} \cdot 4\pi \left(1 + \frac{\pi^2}{16 \operatorname{Artanh}^2 R} - \lambda\right) \int_0^R \varphi_1^2 \rho^3 \, dr + O(\varepsilon) \\ &= S^* + C \left(1 + \frac{\pi^2}{16 \operatorname{Artanh}^2 R} - \lambda\right) \varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$ und eine Konstante $C > 0$. Es gilt $\lambda > 1 + \pi^2/(16 \operatorname{Artanh}^2 R)$ nach Voraussetzung, somit ist der zweite Term echt negativ. Da für kleine ε der zweite Term den dritten Term dominiert, können wir schließen

$$Q_{\lambda, \rho}(u_\varepsilon) < S^* \quad (5.81)$$

beziehungsweise

$$S_{\lambda, \rho}(D) < S^*$$

für genügend kleines $\varepsilon > 0$. □

Lemma 5.19 *Es sei $D' = \mathfrak{B}_\theta(0) \subset \mathbb{H}^3$ eine geodätische Kugel um 0 mit Radius $\theta \in (0, \infty)$ und $R := \tanh \frac{\theta}{2}$. Es sei $\lambda \leq 1 + \frac{\pi^2}{4\theta^2} = 1 + \frac{\pi^2}{16 \operatorname{Artanh}^2 R}$. Dann existiert keine Lösung von (BN).*

Bemerkung 5.20 Für $\lambda \leq \frac{3}{4}$ ist die Nichtexistenz einer Lösung bereits in Lemma 5.13 mit Hilfe einer Pohožaev-Identität gezeigt worden. Diese Methode wird auch jetzt verwendet werden, jedoch mit modifizierten Testfunktionen.

Beweis: Zu zeigen bleibt die Nichtexistenz einer Lösung für $\frac{3}{4} < \lambda \leq 1 + \frac{\pi^2}{4\theta^2}$. Angenommen $u \in H_0^{1,2}(D')$ sei eine Lösung des Brézis-Nirenberg Problems (BN). Da der Rand einer Kugel beliebig glatt ist, folgt aus Abschnitt 5.1.1, daß $u \in C^2(\overline{D'})$ gilt und aus Abschnitt 5.1.2 ergibt sich, daß u radialsymmetrisch sein muß.

In euklidischen Koordinaten genügt eine radialsymmetrische Lösung $u = u(r)$, $r = |x|$ des Brézis-Nirenberg Problems auf $D = B_R(0)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$u'' + \frac{\rho}{r} u' + \lambda \rho^2 u + \rho^2 u^5 = 0 \quad \text{in } (0, R) \quad (5.82)$$

mit den Randbedingungen

$$u'(0) = 0, \quad u(R) = 0. \quad (5.83)$$

Es sei f eine genügend glatte Funktion mit $f(0) = 0$. Multipliziert man die Gleichung (5.82) mit $r^2 f(r) u'$ und integriert über $(0, R)$, so folgt nach partieller Integration und Ausnutzung der Randbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} R^2 f(R) (u'(R))^2 - \int_0^R h(r) (u')^2 dr \\ - \int_0^R a(r) \left(\frac{\lambda}{2} u^2 + \frac{1}{6} u^6 \right) dr = 0, \end{aligned} \quad (5.84)$$

mit

$$h(r) = r f(r) + \frac{1}{2} r^2 f'(r) - \rho r f(r), \quad (5.85)$$

$$a(r) = 2 r^3 \rho^3 f(r) + 2 \rho^2 r f(r) + \rho^2 r^2 f'(r). \quad (5.86)$$

Multipliziert man die Gleichung (5.82) mit $h(r) u$, integriert wiederum über $(0, R)$ und beachtet bei der partiellen Integration, daß $f(0) = 0$ gilt, so ergibt sich

$$- \int_0^R h(r) (u')^2 dr + \int_0^R \rho^2 h(r) u^6 dr + \int_0^R b(r) u^2 dr = 0 \quad (5.87)$$

mit

$$b(r) = \frac{1}{2} h'' - \frac{1}{2} \frac{\rho}{r} h' - \frac{1}{2} \rho^2 h + \frac{1}{2} \frac{\rho}{r^2} h + \lambda \rho^2 h. \quad (5.88)$$

Subtrahiert man Gleichung (5.87) von Gleichung (5.84), so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} R^2 f(R) (u'(R))^2 - \int_0^R \left\{ \frac{\lambda}{2} a(r) + b(r) \right\} u^2 dr \\ - \int_0^R \left\{ \frac{1}{6} a(r) + \rho^2 h(r) \right\} u^6 dr = 0 \end{aligned} \quad (5.89)$$

mit h , a und b wie in (5.85), (5.86) und (5.88). Eine lange, aber elementare Rechnung liefert

$$\frac{\lambda}{2} a(r) + b(r) = \frac{1}{4} r^2 \left\{ f''' - 3 \rho r f'' + \rho^2 \left(\frac{3}{2} r^2 - \frac{9}{2} + 4 \lambda \right) f' \right\} \quad (5.90)$$

und

$$\frac{1}{6} a(r) + \rho^2 h(r) = \frac{2}{3} \rho^2 r^2 f' - \frac{1}{3} \rho^3 r (1 + r^2) f. \quad (5.91)$$

Schließlich folgt aus den Gleichungen (5.89)–(5.91), daß jede Lösung u des Brézis-Nirenberg Problems die Integralidentität

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} R^2 f(R) (u'(R))^2 \\ &= \int_0^R \frac{1}{4} r^2 \left\{ f''' - 3 \rho r f'' + \rho^2 \left(\frac{3}{2} r^2 - \frac{9}{2} + 4 \lambda \right) f' \right\} u^2 dr \\ & \quad + \int_0^R \left\{ \frac{2}{3} \rho^2 r^2 f' - \frac{1}{3} \rho^3 r (1 + r^2) f \right\} u^6 dr \quad (5.92) \end{aligned}$$

erfüllt.

Im folgenden wird die Funktion f so gewählt, daß jeweils das erste der beiden Integrale in der obigen Identität verschwindet⁵. Dafür müssen drei Fälle unterschieden werden:

1. $\boxed{\frac{3}{4} < \lambda < 1}$

Es sei

$$f(r) := \sinh \left(2\sqrt{1-\lambda} \operatorname{Artanh} r \right) \cdot \cosh \left(2\sqrt{1-\lambda} \operatorname{Artanh} r \right) \quad \text{in } [0, R].$$

Dann ist $f(0) = 0$, $f(r) > 0$ für $r \in (0, R]$ und eingesetzt in Gleichung (5.92) folgt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} R^2 f(R) (u'(R))^2 \\ &= \int_0^R \frac{1}{3} r \rho^3 \left\{ 2 r \sqrt{1-\lambda} (2 \cosh^2 \omega - 1) - (1 + r^2) \cosh \omega \sinh \omega \right\} u^6 dr, \quad (5.93) \end{aligned}$$

wobei $\omega := 2\sqrt{1-\lambda} \operatorname{Artanh} r$.

⁵ Um eine geeignete Funktion f zu finden, löst man mit Hilfe von Maple die Differentialgleichung $\{f''' - 3\rho r f'' + \rho^2(\frac{3}{2}r^2 - \frac{9}{2} + 4\lambda)f'\} = 0$ in $(0, R)$ mit $f(0) = 0$.

Aus der strikten Positivität von u folgt mit dem Hopfschen Lemma wie schon im Beweis von Lemma 5.13 auf Seite 45, daß der Betrag der Normalenableitung auf dem Rand strikt positiv ist. Somit gilt $|u'(R)| > 0$ und die linke Seite der obigen Gleichung ist strikt positiv.

Das Vorzeichen der rechten Seite der Gleichung ist abhängig vom Vorzeichen des Ausdrucks in geschweiften Klammern, alle anderen Faktoren unter dem Integral sind positiv in $(0, R)$. Eine lange, sehr technische Rechnung (vergl. Anhang A.3) ergibt, daß

$$2r\sqrt{1-\lambda}(2\cosh^2\omega-1)-(1+r^2)\cosh\omega\sinh\omega\leq 0 \quad (5.94)$$

für $r \in (0, R)$ und $\frac{3}{4} < \lambda < 1$ gilt. Somit ist die rechte Seite der Gleichung (5.93) negativ, während die linke Seite der Gleichung strikt positiv ist. Aus diesem Widerspruch folgt, daß für $\frac{3}{4} < \lambda < 1$ keine Lösung des Brézis-Nirenberg Problems existiert.

2. $\lambda = 1$

Es sei

$$f(r) := \text{Artanh } r \quad \text{in } [0, R].$$

Dann ist $f(0) = 0$, $f(r) > 0$ für $r \in (0, R]$ und eingesetzt in die Gleichung (5.92) folgt

$$\frac{1}{2}R^2 f(R) (u'(R))^2 = \int_0^R \frac{1}{3} r \rho^3 \{r - (1+r^2) \text{Artanh } r\} u^6 dr. \quad (5.95)$$

Die linke Seite der Gleichung ist strikt positiv, da $|u'(R)|$ und $f(R)$ strikt positiv sind. Weiter gilt

$$\begin{aligned} r - (1+r^2) \text{Artanh } r &= r - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{2n+1} - r^2 \text{Artanh } r \\ &= -r^2 \text{Artanh } r - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{2n+1} \\ &< 0 \quad \text{für } r \in (0, R) \subset (0, 1). \end{aligned} \quad (5.96)$$

Also ist der Integrand auf der rechten Seite der Gleichung strikt negativ und somit auch das Integral, was im Widerspruch zur strikten Positivität der linken Seite steht. Es folgt die Nichtexistenz einer Lösung des Brézis-Nirenberg Problems für $\lambda = 1$.

$$3. \quad \boxed{1 < \lambda \leq 1 + \frac{\pi^2}{16 \operatorname{Artanh}^2 R}}.$$

Es sei

$$f(r) := \sin(2\sqrt{-1 + \lambda} \operatorname{Artanh} r) \cdot \cos(2\sqrt{-1 + \lambda} \operatorname{Artanh} r) \quad \text{in } [0, R].$$

Dann ist $f(0) = 0$, $f(r) > 0$ für $r \in (0, R]$ und eingesetzt in die Gleichung (5.92) folgt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} R^2 f(R) (u'(R))^2 \\ &= \int_0^R \frac{1}{3} r \rho^3 \left\{ 2r \sqrt{\lambda - 1} (2 \cos^2 \omega - 1) - (1 + r^2) \sin \omega \cos \omega \right\} u^6 dr \quad (5.97) \end{aligned}$$

wobei $\omega := 2\sqrt{\lambda - 1} \operatorname{Artanh} r$.

Aus $|u'(R)| > 0$ und $f(R) > 0$ folgt wieder die strikte Positivität der linken Seite der Gleichung.

Das Vorzeichen der rechten Seite der Gleichung ist erneut abhängig vom Vorzeichen des Ausdrucks in geschweiften Klammern, alle anderen Faktoren unter dem Integral sind positiv in $(0, R)$. Eine weitere lange, technische Rechnung (vergl. Anhang A.3) ergibt, das gilt

$$2r \sqrt{\lambda - 1} (2 \cos^2 \omega - 1) - (1 + r^2) \sin \omega \cos \omega \leq 0 \quad (5.98)$$

für $r \in (0, R)$ und $1 < \lambda \leq 1 + \pi^2/(16 \operatorname{Artanh}^2 R)$. Somit ist die rechte Seite der Gleichung (5.97) negativ, während die linke Seite der Gleichung strikt positiv ist. Da dies ein Widerspruch ist, existiert für $1 < \lambda \leq 1 + \pi^2/(16 \operatorname{Artanh}^2 R)$ keine Lösung des Brézis-Nirenberg Problems.

Somit ist gezeigt, daß es für $\lambda \leq 1 + \pi^2/(16 \operatorname{Artanh}^2 R) = 1 + \pi^2/(4\theta^2)$ keine Lösung des Brézis-Nirenberg Problems gibt. \square

Wir beweisen den Hauptsatz dieses Abschnitts:

Beweis: (von Satz 6)

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die geodätische Kugel D' den Mittelpunkt 0 hat (vergl. Abschnitt 5.1.3), daß heißt $D' = \mathfrak{B}_\theta(0)$.

zu (ii):

Die Nichtexistenz einer Lösung für $\lambda \geq \lambda_1$ ist in Lemma 5.12 auf Seite 44 gezeigt worden. Mit Satz 3 auf Seite 29 ergibt sich

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\pi^2}{4 \operatorname{arctanh}^2 R} = 1 + \frac{\pi^2}{\theta^2}.$$

Also existiert keine Lösung für $\lambda \geq 1 + \frac{\pi^2}{\theta^2}$.

zu (iii):

Die Nichtexistenz einer Lösung für $\lambda \leq 1 + \frac{\pi^2}{4\theta^2}$ folgt aus Lemma 5.19.

zu (i):

Nach Lemma 5.18 auf Seite 60 gilt $S_{\lambda,\rho}(D) < S^*$ für alle $\lambda > 1 + \frac{\pi^2}{4\theta^2}$. Daraus folgt mit dem Lemma über konzentrierte Kompaktheit (Lemma 5.11) die Existenz eines Minimierers $u \in H_0^{1,2}(D)$ von $S_{\lambda,\rho}(D)$ für jedes $\lambda > 1 + \frac{\pi^2}{4\theta^2}$.

Nach Abschnitt 5.1.4 ist für $\lambda < \lambda_1 = 1 + \frac{\pi^2}{\theta^2}$ jeder Minimierer nach geeigneter Skalierung eine schwache Lösung des Brézis-Nirenberg Problems. Damit ist die Existenz einer schwachen Lösung für $1 + \frac{\pi^2}{4\theta^2} < \lambda < 1 + \frac{\pi^2}{\theta^2}$ gezeigt.

Mit Satz 4 folgt, daß jede schwache Lösung $u \in H_0^{1,2}(D')$ des Brézis-Nirenberg Problems auch eine klassische Lösung $u \in C^2(\overline{D}')$ ist und der Satz ist bewiesen. \square

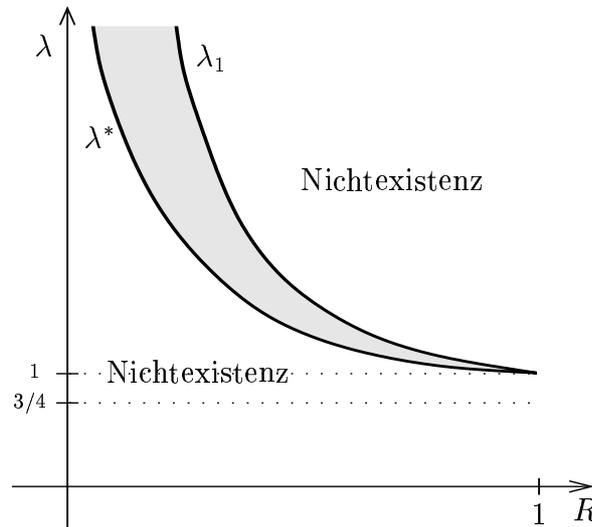


Abbildung 5.2: Existenz von Lösungen für $n = 3$ auf Kugeln mit $\lambda^* = 1 + \frac{\pi^2}{16 \operatorname{Artanh}^2 R}$, $\lambda_1 = 1 + \frac{\pi^2}{4 \operatorname{Artanh}^2 R}$

5.4.2 Das Brezis-Nirenberg Problem auf allgemeineren Gebieten

Für allgemeinere Gebiete gilt folgendes Existenzresultat:

Korollar 5.20 *Es sei $D' \subset \mathbb{H}^3$ ein beschränktes Gebiet. Es sei y ein harmonisches Zentrum von D und $R_h := r(y)$ der zugehörige harmonische Radius.*

Dann existiert ein $\lambda^ \leq 1 + \pi^2/(16 \operatorname{Artanh}^2 R_h)$, so daß es für alle $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_1)$ eine Lösung des Brézis-Nirenberg Problems (BN) gibt.*

Beweis: Der Beweis kann ähnlich zu den Beweisen von Korollar 5.16 und Satz 5 (i) im höherdimensionalen Fall geführt werden und wird deshalb hier nur skizziert.

Es sei $\lambda > 1 + \pi^2/(16 \operatorname{Artanh}^2 R_h)$ beliebig. Mit Lemma 5.18 folgt, daß

$$S_{\lambda,\rho}(B_{R_h}) < S^*$$

gilt, und das Lemma über konzentrierte Kompaktheit (Lemma 5.11) sichert die Existenz eines Minimierers $u_M \in H_0^{1,2}(B_{R_h})$ von $S_{\lambda,\rho}(B_{R_h})$. Dieser ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit radialsymmetrisch und monoton fallend in B_{R_h} . Man definiert dann die harmonische Verpflanzung von u_M nach D und zeigt wie im Beweis von Korollar 5.16 auf Seite 56, daß gilt

$$S^* > S_{\lambda,\rho}(B_{R_h}) \geq S_{\lambda,\rho}(D).$$

Somit ist $S_{\lambda,\rho}(D) < S^*$ für jedes $\lambda > 1 + \pi^2/(16 \operatorname{Artanh}^2 R_h)$. Insbesondere existiert ein $\lambda^* \leq 1 + \pi^2/(16 \operatorname{Artanh}^2 R_h)$ so, daß gilt $S_{\lambda,\rho}(D) < S^*$ für jedes $\lambda > \lambda^*$.

Wendet man erneut das Lemma über konzentrierte Kompaktheit an, folgt für alle $\lambda > \lambda^*$ die Existenz eines Minimierers von $S_{\lambda,\rho}(D)$. Nach Abschnitt 5.1.4 ist für $\lambda < \lambda_1$ jeder Minimierer nach geeigneter Skalierung eine schwache Lösung des Brézis-Nirenberg Problems und die Existenz einer Lösung für $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_1)$ ist bewiesen. □

Offene Frage: Gilt $\lambda^* = 1 + \pi^2/(16 \operatorname{Artanh}^2 R_h)$?

Die Nichtexistenz von Lösungen des Brézis-Nirenberg Problems auf beschränkten Gebieten für $\lambda \geq \lambda_1$ ist bereits in Abschnitt 5.2 gezeigt worden, ebenso wie die Nichtexistenz von Lösungen auf sternförmigen Gebieten für $\lambda \leq 3/4$.

Offene Frage: Kann man das Nichtexistenzresultat aus Lemma 5.19 für $3/4 < \lambda \leq \lambda^*$ auf sternförmige Gebiete verallgemeinern?

5.4.3 Über eine Vermutung von Budd & Humphries

Eine obere Schranke für den kritischen Wert $\lambda^*(D')$ auf $D' \subset \mathbb{H}^3$ kann mit Hilfe der Greenschen Funktion $G_\lambda(x, y)$ des Operators $-\Delta_{\mathbb{H}^3} - \lambda$ unter Dirichletschen Randbedingungen angegeben werden ([Schö], [Bre], [BuH], [B2]).

Für $\lambda < \lambda_1$ existiert die Greensche Funktion und kann in einen positiven, singulären Anteil $f_\lambda(x, y)$ und einen stetigen, regulären Anteil $h_\lambda(x, y)$ aufgespalten werden, wobei $h_\lambda(x, y)$ aufgefaßt als Funktion von λ monoton wachsend in λ ist (vergl. [Bre],

[B2]). Da der reguläre Teil das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta_{\mathbb{H}^3} h_\lambda(x, y) - \lambda h_\lambda(x, y) &= 0 && \text{in } D' \\ h_\lambda(x, y) &= -f_\lambda(x, y) && \text{auf } \partial D' \end{aligned}$$

löst, folgt mit Hilfe des Maximumprinzips

$$\max_{x \in D'} h_0(x, x) < 0$$

und weiterhin gilt

$$\max_{x \in D'} h_\lambda(x, x) \rightarrow +\infty \quad \text{für } \lambda \rightarrow \lambda_1.$$

Also wechselt $\max_{x \in D'} h_\lambda(x, x)$ in $(0, \lambda_1)$ das Vorzeichen und es existiert ein $\nu^* \in (0, \lambda_1)$ so, daß gilt

$$\begin{aligned} \max_{x \in D'} h_\lambda(x, x) &\leq 0 && \text{für } \lambda \leq \nu^* \\ \max_{x \in D'} h_\lambda(x, x) &> 0 && \text{für } \lambda > \nu^*. \end{aligned}$$

Schön hat in [Schö] gezeigt, daß $\nu^* \geq \lambda^*$ ist. Budd und Humphries [BuH] vermuten aufgrund von numerischen Berechnungen, daß gilt

$$\nu^* = \lambda^*. \tag{5.99}$$

Für Kugeln im \mathbb{R}^3 (vergl. [Bre]) beziehungsweise für geodätische Kugeln auf \mathbb{S}^3 (vergl. [B2]) ist die Vermutung von Budd und Humphries (5.99) richtig. Hier soll die Vermutung für geodätische Kugeln im \mathbb{H}^3 überprüft werden:

Es sei $D' = \mathfrak{B}_\theta(0)$ eine geodätische Kugel im \mathbb{H}^3 mit Radius $\theta \in (0, \infty)$ um 0, $R := \tanh \frac{\theta}{2}$ und $G_\lambda(x, 0)$ die Greensche Funktion des Operators $-\Delta_{\mathbb{H}^3} - \lambda$ unter Dirichletschen Randbedingungen mit Singularität in 0. Diese ist radialsymmetrisch und hat für $1 < \lambda < \lambda_1 = 1 + \frac{\pi^2}{4 \operatorname{Artanh}^2 R}$ in euklidischen, radialsymmetrischen Koordinaten die Form⁶

$$\begin{aligned} G_\lambda(r, 0) &= \frac{1 - r^2}{r} \\ &\cdot \left(-\cos(4\sqrt{\lambda - 1} \operatorname{Artanh} R - 2\sqrt{\lambda - 1} \operatorname{Artanh} r) \right. \\ &\quad \left. + \cos(2\sqrt{\lambda - 1} \operatorname{Artanh} r) \right) \cdot \left(1 - \cos(4\sqrt{\lambda - 1} \operatorname{Artanh} R) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

⁶ Um die Greensche Funktion zu berechnen, wurde mit Maple gearbeitet.

Betrachtet man die Potenzreihenentwicklung von $G_\lambda(r, 0)$, so findet man unter Zuhilfenahme von Maple

$$h_\lambda(r, 0) = G_\lambda(r, 0) - \frac{1}{r}$$

und

$$h_\lambda(0, 0) = -\frac{2\sqrt{\lambda-1} \sin(4\sqrt{\lambda-1} \operatorname{Artanh} R)}{1 - \cos(4\sqrt{\lambda-1} \operatorname{Artanh} R)}.$$

Auf Kugeln mit Zentrum im Ursprung gilt (vergl. [Bre], [B2])

$$\max_{x \in D'} h_\lambda(x, x) = h_\lambda(0, 0),$$

somit ergibt sich ν^* in diesem Fall durch Lösen der Gleichung $h_{\nu^*}(0, 0) = 0$. Man erhält

$$\nu^* = 1 + \frac{\pi^2}{16 \operatorname{Artanh}^2 R}$$

und weiter (vergl. Satz 6)

$$\nu^* = \lambda^*(B_R).$$

Also ist die Vermutung von Budd und Humphries (5.99) auch auf geodätischen Kugeln im \mathbb{H}^3 richtig, das Beispiel untermauert ihre These.

Anmerkung: Es reicht, die Greensche Funktion für $1 < \lambda < \lambda_1$ zu berechnen, da für $\lambda = 1$ gilt

$$h_1(0, 0) = -\frac{1}{\operatorname{Artanh} R} < 0$$

und der Vorzeichenwechsel von $h_\lambda(0, 0)$ somit im Intervall $(1, \lambda_1) \subset (0, \lambda_1)$ liegen muß.

5.5 Eigenschaften von Lösungen

5.5.1 Eindeutigkeit von Lösungen

Definition 8 (nach [KwL]) Es sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Eine Funktion $g \in C^0([a, b])$ besitzt die Eigenschaft \wedge , falls ein Punkt $c \in [a, b]$ existiert, so daß g nichtfallend in $[a, c]$ und g nichtwachsend in $[c, b]$ ist.

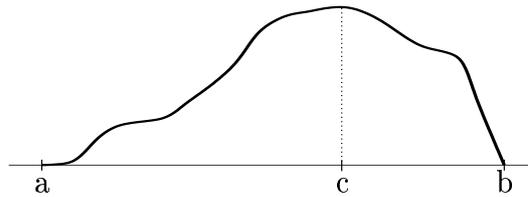


Abbildung 5.3: Eine Funktion mit der Eigenschaft \wedge

Lemma 5.21 ([KwL]) Sei $B_R = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ eine Kugel im \mathbb{R}^n . Sei $q \in C^0([0, R])$ und

$$G(r) := r^\beta q(r) - Lr^{\beta-2}$$

mit

$$\beta = \frac{2m(p-1)}{p+3} \quad \text{und} \quad L = \frac{2m(mp+m-p-3)}{(p+3)^2},$$

wobei $m = n - 1$, besitze die \wedge -Eigenschaft.

Dann hat das Problem

$$\begin{aligned} \Delta u + u^p + q(|x|)u &= 0 && \text{in } B_R \\ u &> 0 && \text{in } B_R \\ u &= 0 && \text{auf } \partial B_R \end{aligned}$$

für $p > 1$ höchstens eine radialsymmetrische Lösung.

Satz 7 (Eindeutigkeit von Lösungen auf Kugeln)

Es sei $D' \subset \mathbb{H}^n$, $n \geq 3$ eine geodätische Kugel mit Radius $\theta \in (0, \infty)$ und $R := \tanh \frac{\theta}{2}$.

Dann existiert höchstens eine Lösung des Brézis-Nirenberg Problems (BN) auf D' .

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $D' = \mathfrak{B}_\theta(0)$ (vergl. Abschnitt 5.1.3). Dann ist $D = B_R(0)$, und um die Existenz höchstens einer radialsymmetrischen Lösung des Brézis-Nirenberg Problems zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß

das Problem (vergl. Anhang A.1)

$$\begin{aligned} \Delta v + v^{2^*-1} + \left(\lambda - \frac{n(n-2)}{4} \right) \rho^2 v &= 0 && \text{in } B_R \\ v &> 0 && \text{in } B_R \\ v &= 0 && \text{auf } \partial B_R \end{aligned} \quad (5.100)$$

höchstens eine radialsymmetrische Lösung besitzt. Dazu benutzen wir Lemma 5.21.

Mit den Bezeichnungen aus dem Lemma gilt

$$\begin{aligned} p &= 2^* - 1 = \frac{n+2}{n-2} > 1, \\ q(|x|) &= \left(\lambda - \frac{n(n-2)}{4} \right) \left(\frac{2}{1-|x|^2} \right)^2 \in C^0([0, R]), \text{ da } R < 1, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2(n-1)(2^*-2)}{2^*+2} = 2, \\ L &= \frac{2(n-1)((n-1)(2^*-1+1) - 2^*+1-3)}{(2^*+2)^2} = \frac{(n-2)^2}{4}, \end{aligned}$$

sowie

$$G(r) = r^2 \cdot q(r) - L = \left(\lambda - \frac{n(n-2)}{4} \right) r^2 \rho^2 - \frac{(n-2)^2}{4} \text{ mit } r = |x|.$$

Um das Lemma anwenden zu können, bleibt zu zeigen, daß die Funktion G die \wedge -Eigenschaft in $[0, R]$ besitzt. Es gilt

$$G'(r) = \left(\lambda - \frac{n(n-2)}{4} \right) \cdot (2r\rho^2 + 2r^3\rho^3).$$

Da der erste Faktor konstant und der zweite Faktor positiv in $[0, R]$ ist, wechselt G' in $(0, R)$ das Vorzeichen nicht. Somit ist G monoton in $[0, R]$. Es folgt, daß G die \wedge -Eigenschaft besitzt, denn falls G monoton wachsend in $[0, R]$ ist, wählt man $c = R$, falls G monoton fallend ist, wählt man $c = 0$ um die Forderungen der Definition der \wedge -Eigenschaft zu erfüllen.

Mit Lemma 5.21 folgt, daß das Problem (5.100) und somit auch das Brézis-Nirenberg Problem auf D' höchstens eine radialsymmetrische Lösung haben kann.

Nach Abschnitt 5.1.2 ist jede Lösung des Brézis-Nirenberg Problems auf der geodätischen Kugel D' radialsymmetrisch, und es folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 5.21 Auf allgemeinen Gebieten $D' \subset \mathbb{H}^n$ ist die Eindeutigkeit einer Lösung nicht zu erwarten.

5.5.2 Verhalten von Lösungen für $\lambda \searrow \lambda^*$ beziehungsweise $\lambda \nearrow \lambda_1$

Es sei $\lambda^*(D') < \lambda < \lambda_1$ und u_λ ein Minimierer des Variationsproblems (5.16). In [Eg1] hat Egnell bereits gezeigt, daß für $\lambda \nearrow \lambda_1$ gilt

$$\lim_{\lambda \nearrow \lambda_1} \left(\operatorname{ess\,sup}_{x \in D'} u_\lambda(x) \right) = 0. \quad (5.101)$$

Insbesondere konvergiert eine Folge von Lösungen des Brézis-Nirenberg Problems auf D' für $\lambda \nearrow \lambda_1$ punktweise fast überall gegen 0.

Um das Verhalten von Lösungen für $\lambda \searrow \lambda^*$ zu beschreiben, folgen wir der Argumentation in [B2]. Für die Minimierer u_λ gilt einerseits

$$\begin{aligned} S_{\lambda^*,\rho}(D) &\leq \int_D |\nabla u_\lambda|^2 \rho^{n-2} dx - \lambda^* \int_D u_\lambda^2 \rho^n dx \\ &= S_{\lambda,\rho}(D) + (\lambda - \lambda^*) \int_D u_\lambda^2 \rho^n dx \\ &\leq S_{\lambda,\rho}(D) + (\lambda - \lambda^*) \left(\int_D \rho^{n^2/2} dx \right)^{2/n}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Höldersche Ungleichung benutzt worden ist, andererseits ist für $\lambda > \lambda^*$

$$\begin{aligned} S_{\lambda^*,\rho}(D) &= \inf_{u \in X_\rho} \left(\int_D |\nabla u|^2 \rho^{n-2} dx - \lambda \int_D u^2 \rho^n dx + (\lambda - \lambda^*) \int_D u^2 \rho^n dx \right) \\ &\geq \inf_{u \in X_\rho} \left(\int_D |\nabla u|^2 \rho^{n-2} dx - \lambda \int_D u^2 \rho^n dx \right) = S_{\lambda,\rho}(D) \end{aligned}$$

mit $X_\rho = \{u \in H_0^{1,2}(D) \mid \int_D u^2 \rho^n dx = 1\}$. Es folgt

$$\lim_{\lambda \searrow \lambda^*} \left(\int_D |\nabla u_\lambda|^2 \rho^{n-2} dx - \lambda^* \int_D u_\lambda^2 \rho^n dx \right) = S_{\lambda^*,\rho}(D).$$

Also ist $\{u_\lambda\}$ eine minimierende Folge für $S_{\lambda^*,\rho}(D)$. Für diese gilt, eventuell nach Übergang zu einer Teilfolge die wieder mit $\{u_\lambda\}$ bezeichnet wird, die „concentration-compactness“-Alternative (vergl. [BBF, Seite 1118]): Entweder konvergiert u_λ für $\lambda \searrow \lambda^*$ in $H_0^{1,2}(D')$ gegen einen Minimierer von $S_{\lambda^*,\rho}(D)$ oder die Minimalfolge konzentriert sich in einem Punkt $x_0 \in D'$.

In den Abschnitten 5.3 und 5.4 ist für gewisse Gebiete $D' \subset \mathbb{H}^n$, $n \geq 3$ die Nichtexistenz von Lösungen des Brézis-Nirenberg Problems und somit auch die Nichtexistenz eines Minimierer von $S_{\lambda^*,\rho}(D)$ für den kritischen Wert λ^* gezeigt worden. In diesen Fällen konzentriert sich die Minimalfolge.

Offene Frage: Gibt es Gebiete D' , so daß $S_{\lambda^*,\rho}(D)$ angenommen wird?

5.6 Gegenüberstellung der Ergebnisse für \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n und \mathbb{S}^3

Um die bekannten Ergebnisse für die Existenz und Nichtexistenz von Lösungen des Brézis-Nirenberg Problems auf Gebieten im \mathbb{R}^n ([BN]) und geodätischen Kugeln im \mathbb{S}^3 ([BB]) mit den Resultaten dieser Arbeit zu vergleichen, beschränken wir uns der besseren Darstellbarkeit halber auf Kugeln.

Brézis und Nirenberg haben in [BN] gezeigt, daß auf Kugeln $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 4$ für alle $\lambda \in (0, \lambda_1)$, wobei λ_1 der erste Dirichlet-Eigenwert des Laplace-Operators auf $B_R(0)$ ist, eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda u + u^{2^*-1} &= 0 && \text{in } B_R(0) \\ u &> 0 && \text{in } B_R(0) \\ u &= 0 && \text{auf } \partial B_R(0) \end{aligned}$$

existiert, während es für $\lambda \leq 0$ und für $\lambda \geq \lambda_1$ keine Lösung gibt.

Das Ergebnis für geodätische Kugeln $\mathfrak{B}_\theta(0) \subset \mathbb{H}^n$, $n \geq 4$ ist ähnlich. Die obere Grenze des Existenzbereiches ist der erste Eigenwert des Laplace-Beltrami-Operators auf $\mathfrak{B}_\theta(0)$. Die untere Grenze ist gebietsunabhängig, es gilt $\lambda^* = \frac{n(n-2)}{4}$ (vergl. Satz 5).

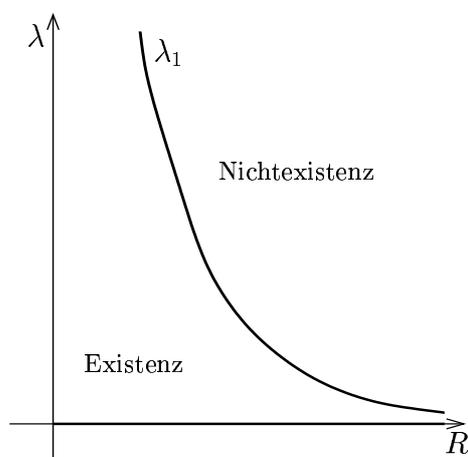


Abbildung 5.4: Existenz von Lösungen auf Kugeln im \mathbb{R}^n , $n \geq 4$

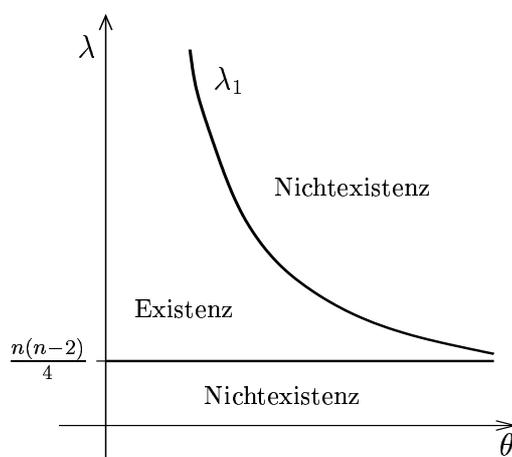
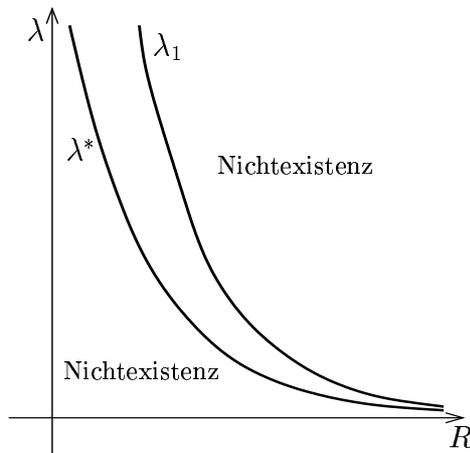


Abbildung 5.5: Existenz von Lösungen auf geodätischen Kugeln im \mathbb{H}^n , $n \geq 4$

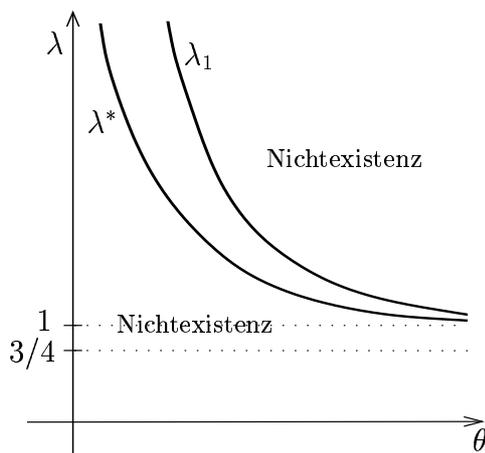
Für Kugeln $B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$ beziehungsweise für geodätische Kugeln $\mathfrak{B}_\theta(0) \subset \mathbb{H}^3$ ist der jeweilige, vom Radius der Kugel abhängende erste Eigenwert λ_1 wie schon für $n \geq 4$ die obere Grenze des Existenzbereiches von Lösungen. Die untere Grenze λ^* hängt ebenfalls vom Radius der Kugel im \mathbb{R}^3 beziehungsweise vom geodätischen Radius der Kugel im \mathbb{H}^3 ab. Es ergibt sich folgendes Bild:



$$\lambda^* = \frac{1}{4} \lambda_1 = \frac{\pi^2}{4R^2}$$

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{R^2}$$

Abbildung 5.6: Existenz von Lösungen auf Kugeln im \mathbb{R}^3



$$\lambda^* = 1 + \frac{\pi^2}{4\theta^2}$$

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\pi^2}{\theta^2}$$

Abbildung 5.7: Existenz von Lösungen auf geodätischen Kugeln im \mathbb{H}^3

Auf geodätischen Kugeln auf \mathbb{S}^3 ist die Frage nach der Existenz von Lösungen nicht komplett geklärt. Bezeichnet man den geodätischen Radius der Kugel mit $\Theta \in (0, \pi)$, so gilt (vergl. [BB]):

1. Für

$$\lambda^* = -1 + \frac{\pi^2}{4\Theta^2} < \lambda < \lambda_1 = -1 + \frac{\pi^2}{\Theta^2}$$

existiert eine Lösung des Brezis-Nirenberg Problems.

2. Für „kleine“ Kugeln, daß heißt $\Theta < \pi/2$ und für $\lambda \leq \lambda^*$ existiert keine Lösung.

3. Für „große“ Kugeln, das heißt $\Theta > \pi/2$ existiert eine Funktion $\nu(\Theta)$, so daß für $\nu(\Theta) < \lambda < \lambda^*$ keine Lösung existiert.
4. Numerische Berechnungen lassen vermuten, daß für $\lambda < \nu(\Theta)$ Lösungen des Brézis-Nirenberg Problems existieren.

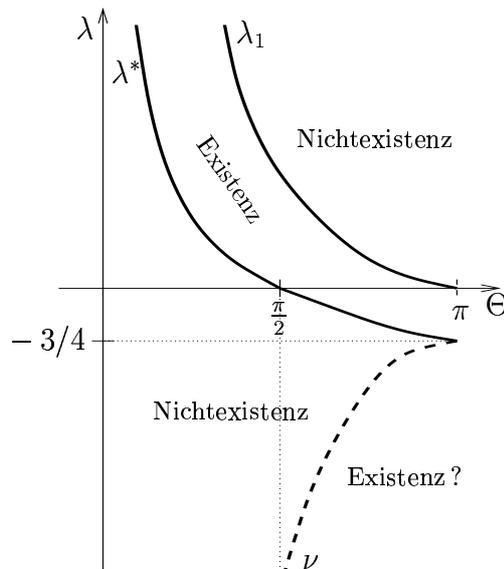


Abbildung 5.8: Existenz von Lösungen auf geodätischen Kugeln auf \mathbb{S}^3

Offene Frage:

Existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß das Brézis-Nirenberg Problem auf $D' = \mathbb{H}^n$ eine Lösung besitzt?

6 Vergleichssätze für allgemeinere Metriken

In diesem Kapitel werden mit den im vorigen Kapitel gezeigten Existenzresultaten für das Brézis-Nirenberg Problem im \mathbb{H}^n Existenzresultate für Randwertprobleme mit allgemeineren Metriken σ (anstatt ρ) hergeleitet.

Dazu sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ ein beschränktes Gebiet und σ eine genügend glatte Funktion auf D . Wir betrachten das Variationsproblem

$$S_{\mu,\sigma}(D) = \inf_{v \in X_\sigma} \left\{ \int_D |\nabla v|^2 \sigma^{n-2} dx - \mu \int_D v^2 \sigma^n dx \right\} \quad (6.1)$$

mit $X_\sigma = \{v \in H_0^{1,2}(D) \mid \int_D |v|^{2^*} \sigma^n dx = 1\}$.

Ein positiver Minimierer $v \in X_\sigma$ des Variationsfunktional (6.1) ist (nach geeigneter Skalierung) für $\mu < \lambda_1$, wobei λ_1 der erste Dirichlet-Eigenwert von $-\Delta_\sigma := -\sigma^{-n} \nabla(\sigma^{n-2} \nabla)$ auf D ist, eine Lösung des Randwertproblems¹

$$\begin{aligned} \sigma^{-n} \nabla(\sigma^{n-2} \nabla v) + \mu v + v^{2^*-1} &= 0 && \text{in } D \\ v &\geq 0 && \text{in } D \\ v &= 0 && \text{auf } \partial D. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Das Lemma über konzentrierte Kompaktheit (Lemma 5.11) sichert die Existenz eines Minimierers von (6.1) und damit einer Lösung des Randwertproblems (6.2), falls gilt $S_{\mu,\sigma}(D) < S^*$. Hierbei bezeichnet S^* die klassische Sobolevkonstante.

Läßt sich σ als Produkt zweier Funktionen σ_1 und σ_2 darstellen, schätzt man $S_{\mu,\sigma}(D)$ mit Hilfe von $S_{\nu,\sigma_1}(D)$ wie folgt nach oben ab (vergl. auch [B2]):

Satz 8 (Vergleichssatz)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ ein beschränktes Gebiet. Sei $\sigma = \sigma_1 \sigma_2$; $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ in D ; $\sigma_1 \in C^1(D)$ und $\sigma_2 \in C^2(D)$. Für alle $x \in D$ gelte

$$\Delta_{\sigma_1} \sigma_2^{\frac{n-2}{2}} + \nu \sigma_2^{\frac{n-2}{2}} \leq \mu \sigma_2^{\frac{n+2}{2}}. \quad (6.3)$$

Dann ist

$$S_{\mu,\sigma}(D) \leq S_{\nu,\sigma_1}(D).$$

¹ Die Herleitung der Eulerschen Differentialgleichung erfolgt analog zum Beweis von Lemma 5.10 auf Seite 41.

Beweis: Es sei $v \in X_\sigma$ beliebig und $\chi := \sigma_2^{\frac{n-2}{2}} v$. Dann ist

$$\begin{aligned} |\nabla v|^2 &= \left| \nabla \left(\sigma_2^{-\frac{n-2}{2}} \chi \right) \right|^2 \\ &= \sigma_2^{-n+2} \left| \nabla \chi - \chi \cdot \frac{n-2}{2} \sigma_2^{-1} \nabla \sigma_2 \right|^2 \\ &= \sigma_2^{-n+2} \left(|\nabla \chi|^2 + \frac{(n-2)^2}{4} \sigma_2^{-2} \chi^2 |\nabla \sigma_2|^2 - \frac{n-2}{2} \sigma_2^{-1} \nabla \sigma_2 \nabla \chi^2 \right), \end{aligned}$$

und weiter gilt

$$\begin{aligned} \int_D |\nabla v|^2 \sigma^{n-2} dx &= \int_D |\nabla \chi|^2 \sigma_1^{n-2} dx + \frac{(n-2)^2}{4} \int_D \chi^2 |\nabla \sigma_2|^2 \sigma_2^{-2} \sigma_1^{n-2} dx \\ &\quad - \frac{n-2}{2} \int_D \nabla \chi^2 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{n-2} \nabla \sigma_2 dx. \end{aligned}$$

Integriert man den letzten Term partiell, beachtet die Randbedingung für χ und faßt die Terme geeignet zusammen, so folgt

$$\begin{aligned} \int_D |\nabla v|^2 \sigma^{n-2} dx &= \int_D |\nabla \chi|^2 \sigma_1^{n-2} dx + \frac{(n-2)^2}{4} \int_D \chi^2 |\nabla \sigma_2|^2 \sigma_2^{-2} \sigma_1^{n-2} dx \\ &\quad + \frac{n-2}{2} \int_D \chi^2 \nabla (\sigma_2^{-1} \sigma_1^{n-2} \nabla \sigma_2) dx \\ &= \int_D |\nabla \chi|^2 \sigma_1^{n-2} dx + \frac{(n-2)^2}{4} \int_D \chi^2 |\nabla \sigma_2|^2 \sigma_2^{-2} \sigma_1^{n-2} dx \\ &\quad + \frac{n-2}{2} \int_D \chi^2 \sigma_2^{-1} \nabla (\sigma_1^{n-2} \nabla \sigma_2) dx - \frac{n-2}{2} \int_D \chi^2 |\nabla \sigma_2|^2 \sigma_2^{-2} \sigma_1^{n-2} dx \\ &= \int_D |\nabla \chi|^2 \sigma_1^{n-2} dx \\ &\quad + \int_D \left\{ \frac{n-2}{2} \sigma_2^{-1} \Delta_{\sigma_1} \sigma_2 + \frac{(n-2)(n-4)}{4} \sigma_1^{-2} \sigma_2^{-2} |\nabla \sigma_2|^2 \right\} \chi^2 \sigma_1^n dx. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Außerdem ist

$$\int_D v^2 \sigma^n dx = \int_D \chi^2 \sigma_2^2 \sigma_1^n dx \tag{6.5}$$

und

$$\int_D |v|^{2^*} \sigma^n dx = \int_D |\chi|^{2^*} \sigma_1^n dx = 1. \quad (6.6)$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} S_{\mu,\sigma}(D) &= \inf_{v \in X_\sigma} \left\{ \int_D |\nabla v|^2 \sigma^{n-2} dx - \mu \int_D v^2 \sigma^n dx \right\} \\ &= \inf_{\chi \in X_{\sigma_1}} \left\{ \int_D |\nabla \chi|^2 \sigma_1^{n-2} dx - \int_D \tilde{\mu}_\sigma(x) \chi^2 \sigma_1^{n-2} dx \right\}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

wobei

$$\tilde{\mu}_\sigma(x) := \mu \sigma_2^2 - \left\{ \frac{n-2}{2} \sigma_2^{-1} \Delta_{\sigma_1} \sigma_2 + \frac{(n-2)(n-4)}{4} \sigma_1^{-2} \sigma_2^{-2} |\nabla \sigma_2|^2 \right\}. \quad (6.8)$$

Da nach Voraussetzung gilt

$$\Delta_{\sigma_1} \sigma_2^{\frac{n-2}{2}} + \nu \sigma_2^{\frac{n-2}{2}} \leq \mu \sigma_2^{\frac{n+2}{2}} \quad \text{in } D,$$

was äquivalent ist zu

$$\tilde{\mu}_\sigma(x) \geq \nu \quad \text{in } D,$$

folgt

$$S_{\mu,\sigma}(D) \leq \inf_{\chi \in X_{\sigma_1}} \left\{ \int_D |\nabla \chi|^2 \sigma_1^{n-2} dx - \int_D \nu \chi^2 \sigma_1^{n-2} dx \right\} = S_{\nu,\sigma_1}(D)$$

und der Satz ist bewiesen. □

Kennt man den kritischen Wert $\nu_{\sigma_1}^*$ für die Existenz eines Minimierers des Variationsproblems bezüglich der Gewichtsfunktion σ_1 , so folgt unter den Voraussetzungen von Satz 8:

Korollar 6.1 *Es sei $\nu_{\sigma_1}^* \in \mathbb{R}$ so, daß gilt² $S_{\nu_{\sigma_1}^*, \sigma_1}(D) = S^*$. Es sei*

$$\mu_\sigma^* := \sup_{x \in D} \sigma_2^{-\frac{n+2}{2}} \left(\Delta_{\sigma_1} \sigma_2^{\frac{n-2}{2}} + \nu_{\sigma_1}^* \sigma_2^{\frac{n-2}{2}} \right). \quad (6.9)$$

Dann gilt für alle $\mu > \mu_\sigma^$*

$$S_{\mu,\sigma}(D) < S^*.$$

² Solch eine Konstante existiert, vergl. Bemerkung 5.11.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt für alle $x \in D$

$$\mu_\sigma^* \geq \sigma_2^{-2} \left(\nu_{\sigma_1}^* + \frac{n-2}{2} \sigma_2^{-1} \Delta_{\sigma_1} \sigma_2 + \frac{(n-2)(n-4)}{4} \sigma_1^{-2} \sigma_2^{-2} |\nabla \sigma_2|^2 \right),$$

dies ist äquivalent zu

$$\nu_{\sigma_1}^* \leq \sigma_2^2 \mu_\sigma^* - \frac{n-2}{2} \sigma_2^{-1} \Delta_{\sigma_1} \sigma_2 - \frac{(n-2)(n-4)}{4} \sigma_1^{-2} \sigma_2^{-2} |\nabla \sigma_2|^2.$$

Mit dem Vergleichssatz (Satz 8) folgt

$$S_{\mu_\sigma^*, \sigma}(D) \leq S_{\nu_{\sigma_1}^*, \sigma_1}(D) = S^*$$

und somit ist für $\mu > \mu_\sigma^*$

$$S_{\mu, \sigma}(D) < S_{\mu_\sigma^*, \sigma}(D) \leq S^*.$$

□

Bemerkung 6.1 Durch die Abschätzung von $S_{\mu, \sigma}(D)$ mit Hilfe von $S_{\nu_{\sigma_1}^*, \sigma_1}(D)$ erhält man nur eine obere Schranke für den kritischen Wert von μ . Es kann ein $\hat{\mu}_\sigma^* \leq \mu_\sigma^*$ existieren, so daß für alle $\mu > \hat{\mu}_\sigma^*$ gilt $S_{\mu, \sigma}(D) < S^*$. Grund dafür ist, daß die Abschätzung des zweiten Integrals im Beweis von Satz 8 durch punktweisen Vergleich der Integranden erfolgt.

Bemerkung 6.2 Für alle $\mu > \mu_\sigma^*$ existiert ein Minimierer des Variationsproblems (6.1).

Anwendung I

Es sei $D \subset\subset B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ ein Gebiet und $\sigma_1 := \rho$. Dann ist (vergl. Satz 5 und Satz 6)

$$\nu_\rho^* = \begin{cases} \frac{n(n-2)}{4} & \text{für } n \geq 4 \\ 1 + \frac{\pi^2}{16 \operatorname{Arctanh}^2 R} & \text{für } n = 3, D = B_R(0) \end{cases} \quad (6.10)$$

und (vergl. Korollar 6.1)

$$\mu_\sigma^* = \sup_{x \in D} \sigma_2^{-2} \left(\nu_\rho^* + \frac{n-2}{2} \sigma^{-2} \left(\sigma_2 \Delta \sigma_2 + (n-2) \sigma x \cdot \nabla \sigma_2 + \frac{(n-4)}{2} |\nabla \sigma_2|^2 \right) \right). \quad (6.11)$$

Beispielhaft wird für einige Gewichtsfunktionen σ der kritische Wert μ_σ^* für die Existenz eines Minimierers des Variationsproblems (6.1) berechnet. Für $\sigma = \rho$ folgt mit Formel (6.11), daß $\mu_\sigma^* = \nu_\rho^*$ ist. Weiter gilt:

- *Beispiel 1:* $\sigma = 1$ (\mathbb{R}^n -Metrik)

Es ist $\sigma_2 = \sigma\rho^{-1} = \rho^{-1}$, $\nabla\sigma_2 = -x$ und $\Delta\sigma_2 = -n$. Setzt man dies in Formel (6.11) ein, so folgt

$$\begin{aligned}\mu_\sigma^* &= \sup_{x \in D} \rho^2 \left(\nu_\rho^* - \frac{n(n-2)}{4} \right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } n \geq 4 \\ \frac{1}{(1-R^2)^2} \cdot \left(1 + \frac{\pi^2}{4 \operatorname{Arctanh}^2 R} \right) & \text{für } n = 3, D = B_R(0). \end{cases}\end{aligned}$$

Das Ergebnis entspricht weitgehend dem Resultat von Brézis und Nirenberg ([BN], vergl. Abschnitt 5.6). Für $n \geq 4$ ist 0 exakt die untere Grenze des Existenzbereichs von Lösungen. Für $n = 3$ ist die untere Grenze des Existenzbereichs $\frac{\pi^2}{4R^2} < \mu_\sigma^*$ für $R \in (0, 1)$. Die Abschätzung mit Hilfe des kritischen Wertes für die Metrik $\sigma_1 = \rho$ liefert in diesem Fall nur eine obere Schranke für den kritischen Wert bezüglich der Metrik $\sigma = 1$.

- *Beispiel 2:* $\sigma = \frac{2}{1+|x|^2}$ (\mathbb{S}^n -Metrik)

Es ist $\sigma_2 = \sigma\rho^{-1} = \frac{1-|x|^2}{1+|x|^2}$, $\nabla\sigma_2 = -\frac{4x}{(1+|x|^2)^2}$ und $\Delta\sigma_2 = \frac{-4n(1+|x|^2)+16|x|^2}{(1+|x|^2)^3}$. Setzt man dies in Formel (6.11) ein, so folgt

$$\begin{aligned}\mu_\sigma^* &= \sup_{x \in D} \left(\frac{1+|x|^2}{1-|x|^2} \right)^2 \cdot \left(\nu_\rho^* - \frac{n(n-2)}{2} \cdot \frac{1+|x|^4}{(1+|x|^2)^2} \right) \\ &= \sup_{x \in D} \left(\frac{1+|x|^2}{1-|x|^2} \right)^2 \cdot \left(\nu_\rho^* - \frac{n(n-2)}{4} \right) - \frac{n(n-2)}{4} \\ &= \begin{cases} -\frac{n(n-2)}{4} & \text{für } n \geq 4 \\ -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1+R^2}{1-R^2} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{\pi^2}{4 \operatorname{Arctanh}^2 R} \right) & \text{für } n = 3, D = B_R(0). \end{cases}\end{aligned}$$

Der kritische Wert für $n \geq 4$ ist exakt, für $n = 3$ erhält man wiederum nur eine obere Schranke für den tatsächlichen kritischen Wert $-1 + \frac{\pi^2}{16 \arctan^2 R}$ ([BB], vergl. Abschnitt 5.6).

- *Beispiel 3:* $\sigma_2 = \sqrt{1+\varepsilon}$, $|\varepsilon| \ll 1$ (kleiner Störterm)

Es ist $\sigma = \sqrt{1+\varepsilon}\rho$ und $\nabla\sigma_2 = \Delta\sigma_2 = 0$. Eingesetzt in Formel (6.11) folgt

$$\mu_\sigma^* = \sup_{x \in D} (1+\varepsilon)^{-1} \left(\nu_\rho^* + \frac{n-2}{2} \sigma^{-2} \cdot 0 \right) = (1+\varepsilon)^{-1} \nu_\rho^*.$$

Die untere Grenze des Existenzbereichs für Lösungen des Brézis-Nirenberg Problems im \mathbb{H}^n wird minimal „verschoben“.

- *Beispiel 4:* $\sigma_2 = |x|$, $0 \in D$ (ausgeartete Metrik)

Die Funktion σ_2 erfüllt nicht die Voraussetzungen des Satzes 8, da σ_2 nicht strikt positiv und nicht stetig differenzierbar in D ist. Berechnet man formal $\nabla\sigma_2$ und $\Delta\sigma_2$, so hat die Formel (6.11) die Form

$$\mu_\sigma^* = \sup_{x \in D} \left\{ - \left(\frac{n-2}{4} \right)^2 + \left(\nu_\rho^* - 2 \left(\frac{n-2}{4} \right)^2 \right) |x|^{-2} + 3 \left(\frac{n-2}{4} \right)^2 |x|^{-4} \right\}.$$

Da nach Voraussetzung gilt $0 \in D$, folgt

$$\mu_\sigma^* = +\infty$$

und es existiert kein $\mu \in \mathbb{R}$ so, daß gilt $S_{\mu,\sigma}(D) < S^*$. Grund dafür ist, daß die in 0 verschwindende Gewichtsfunktion ermöglicht, daß sich eine Minimalfolge im Punkt 0 konzentriert und somit nicht jede Minimalfolge kompakt sein muß.

- *Beispiel 5:* $\sigma_2 = \frac{2}{1-|x|^2}$

Es ist $\sigma = \rho^2$, $\nabla\rho = x\rho^2$ und $\Delta\rho = n\rho^2 + 2|x|^2\rho^3$. Eingesetzt in Formel (6.11) folgt

$$\begin{aligned} \mu_\sigma^* &= \sup_{x \in D} \rho^{-2} \left(\nu_\rho^* + \frac{n(n-2)}{4} + (n-2)|x|^2 \right) \\ &= \frac{(1-R^2)^2}{4} \left(\nu_\rho^* + \frac{n(n-2)}{4} + (n-2)R^2 \right). \end{aligned}$$

Insbesondere kann für jede Gewichtsfunktion σ auf $D \subset B_1(0)$, die sich darstellen läßt als Produkt von ρ und einer zweimal stetig differenzierbaren, strikt positiven Funktion σ_2 der Wert μ_σ^* berechnet werden.

Bemerkung 6.3 Um Korollar 6.1 anwenden zu können, muß man sich auf Gebiete beschränken, für die man den kritischen Wert $\nu_{\sigma_1}^*$ kennt. Im Fall $\sigma_1 = \rho$ muß zum Beispiel gelten $D \subset B_1(0)$.

Anwendung II

Die in Kapitel 5 hergeleiteten Existenzresultate sind unabhängig von der Wahl des Modells für \mathbb{H}^n .

Wählt man anstatt des konformen Kugelmodells das Halbebene­modell (vergl. Abschnitt 2.1) und wiederum euklidische Koordinaten, so hat der metrische Tensor die Form (vergl. zum Beispiel [Ra, §4.6])

$$(g_{ij}(x))_{i,j=1\dots n} = (\tilde{\rho}^2(x) \delta_{ij})_{i,j=1\dots n},$$

wobei $\tilde{\rho}(x) := \frac{1}{x_n}$ eine Funktion auf $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\} \subset \mathbb{R}^n$ ist.

Für ein beschränktes Gebiet $D \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ und $\sigma_1 := \tilde{\rho}$ ist dann (vergl. Satz 5 und Satz 6)

$$\nu_{\tilde{\rho}}^* = \begin{cases} \frac{n(n-2)}{4} & \text{für } n \geq 4 \\ 1 + \frac{\pi^2}{4\theta^2} & \text{für } n = 3, D = \mathfrak{B}_\theta(e_n) \end{cases} \quad (6.12)$$

und (vergl. Korollar 6.1)

$$\mu_\sigma^* = \sup_{x \in D} \sigma_2^{-2} \left(\nu_{\tilde{\rho}}^* + \frac{n-2}{2} \sigma^{-2} \left(\sigma_2 \Delta \sigma_2 - (n-2) \sigma e_n \cdot \nabla \sigma_2 + \frac{n-4}{2} |\nabla \sigma_2|^2 \right) \right). \quad (6.13)$$

Man kann für jede Gewichtsfunktion σ auf $D \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$, die sich darstellen läßt als Produkt von $\tilde{\rho}$ und einer zweimal stetig differenzierbaren, strikt positiven Funktion σ_2 den Wert μ_σ^* berechnen.

Bemerkung 6.4 Die Verwendung verschiedener Modelle für den hyperbolischen Raum \mathbb{H}^n ermöglicht Existenzaussagen für Randwertprobleme mit allgemeineren Gewichten σ auf verschiedensten Gebieten, schränkt aber auch die möglichen Gewichtsfunktionen ein.

Anwendung III

Ähnliche Transformationen wie im Beweis des Vergleichssatzes (Satz 8) werden in der Riemannschen Geometrie in Verbindung mit dem Yamabe-Problem (vergl. zum Beispiel [Tru], [Aub, Kapitel 5]) verwendet.

Es sei M eine kompakte, beliebig oft stetig differenzierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ mit Metrik g und skalarer Krümmung R . Es sei $g' = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g$ (mit $\varphi \in C^\infty(M)$, $\varphi > 0$) eine konforme Deformation der Metrik g mit skalarer Krümmung R' . Dann löst φ auf M die Differentialgleichung (vergl. [Aub, 5.2])

$$\frac{4(n-1)}{(n-2)} \Delta_g \varphi + R \varphi = R' \varphi^{2^*-1}, \quad (6.14)$$

wobei $\Delta_g \varphi = -|g|^{-\frac{1}{2}} \partial_i \left(g^{ij} \sqrt{|g|} \partial_j \varphi \right)$ der Laplace-Beltrami-Operator bezüglich g ist.

Für eine beliebige konforme Metrik $g = (g_{ij})_{i,j=1\dots n} = (\sigma_1^2 \delta_{ij})_{i,j=1\dots n}$ (mit $\sigma_1 \in C^\infty(M)$, $\sigma_1 > 0$) hat die Gleichung (6.14) die Form

$$-\frac{4(n-1)}{(n-2)} \Delta_{\sigma_1} \varphi + R \varphi = R' \varphi^{2^*-1}. \quad (6.15)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung möchten wir die Formel (6.9) für den kritischen Wert von μ aus Korollar 6.1 umschreiben. Setzt man $\sigma_2 := \varphi^{\frac{2}{n-2}}$, so ist

$$\nabla \sigma_2 = \frac{2}{n-2} \varphi^{-\frac{n-4}{n-2}} \nabla \varphi$$

und

$$\begin{aligned} \Delta_{\sigma_1} \sigma_2 &= \sigma_1^{-n} \nabla \left(\sigma_1^{n-2} \nabla \sigma_2 \right) \\ &= \frac{2}{n-2} \sigma_1^{-n} \nabla \left(\varphi^{-\frac{n-4}{n-2}} \sigma_1^{n-2} \nabla \varphi \right) \\ &= \frac{2}{n-2} \varphi^{-\frac{n-4}{n-2}} \Delta_{\sigma_1} \varphi - \frac{2(n-4)}{(n-2)^2} \sigma_1^{-2} \varphi^{-\frac{2n-6}{n-2}} |\nabla \varphi|^2. \end{aligned}$$

Formel (6.9) hat dann die Darstellung

$$\begin{aligned} \mu_\sigma^* &= \sup_{x \in D} \sigma_2^{-2} \left(\nu_{\sigma_1}^* + \frac{n-2}{2} \sigma_2^{-1} \Delta_{\sigma_1} \sigma_2 + \frac{(n-2)(n-4)}{4} \sigma_1^{-2} \sigma_2^{-2} |\nabla \sigma_2|^2 \right) \\ &= \sup_{x \in D} \varphi^{-\frac{4}{n-2}} \left(\nu_{\sigma_1}^* + \varphi^{-1} \Delta_{\sigma_1} \varphi - \frac{n-4}{n-2} \sigma_1^{-2} \varphi^{-2} |\nabla \varphi|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n-2)(n-4)}{4} \sigma_1^{-2} \varphi^{-\frac{4}{n-2}} \cdot \frac{4}{(n-2)^2} \varphi^{-\frac{2n-8}{n-2}} |\nabla \varphi|^2 \right) \\ &= \sup_{x \in D} \varphi^{-\frac{4}{n-2}} \left(\nu_{\sigma_1}^* + \varphi^{-1} \Delta_{\sigma_1} \varphi \right). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Eine beschränkte Teilmenge D des \mathbb{R}^n ist eine kompakte, beliebig oft stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit, die mit der konformen Metrik

$$g = (g_{ij})_{i,j=1\dots n} = (\sigma_1^2 \delta_{ij})_{i,j=1\dots n},$$

wobei $\sigma_1 \in C^\infty(D)$, $\sigma_1 > 0$ in D , zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit wird. Für die Metriken g und

$$g' = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g = (\sigma_2^2 \sigma_1^2 \delta_{ij})_{i,j=1\dots n} = (\sigma^2 \delta_{ij})_{i,j=1\dots n}$$

mit den skalaren Krümmungen R und R' gilt die Gleichung (6.15). Setzt man diese ein in Formel (6.16), so folgt

$$\begin{aligned}\mu_\sigma^* &= \sup_{x \in D} \varphi^{-\frac{4}{n-2}} \left(\nu_{\sigma_1}^* + \frac{n-2}{4(n-1)} \left(R - R' \varphi^{\frac{4}{n-2}} \right) \right) \\ &= \sup_{x \in D} \sigma_2^{-2} \left(\nu_{\sigma_1}^* + \frac{n-2}{4(n-1)} R - \frac{n-2}{4(n-1)} R' \sigma_2^2 \right).\end{aligned}\tag{6.17}$$

Bemerkung 6.5 Im Allgemeinen ist $R = R(x)$, also nicht konstant.

Beispielhaft werden einige Werte für μ_σ^* berechnet:

- *Beispiel 1:*

$$\begin{aligned}g_{ij} &= \rho^2 \delta_{ij} \text{ (}\mathbb{H}^n\text{-Metrik)} \\ \sigma_2 &= 1\end{aligned}$$

Dann ist $g'_{ij} = \rho^2 \delta_{ij} = g_{ij}$ (\mathbb{H}^n -Metrik) und $R = R' = -n(n-1)$ (vergl. [BBF]). Setzt man dies in Formel (6.17) ein, so folgt

$$\mu_\sigma^* = \sup_{x \in D} \left(\nu_\rho^* + \frac{n-2}{4(n-1)} R - \frac{n-2}{4(n-1)} R' \right) = \nu_\rho^*.$$

- *Beispiel 2:*

$$\begin{aligned}g_{ij} &= \rho^2 \delta_{ij} \text{ (}\mathbb{H}^n\text{-Metrik)} \\ \sigma_2 &= \rho^{-1}\end{aligned}$$

Dann ist $g'_{ij} = \delta_{ij}$ (\mathbb{R}^n -Metrik), $R = -n(n-1)$ und $R' = 0$ (vergl. [BBF]). Setzt man dies in Formel (6.17) ein, so folgt

$$\begin{aligned}\mu_\sigma^* &= \sup_{x \in D} \rho^2 \left(\nu_\rho^* - \frac{n(n-2)}{4} \right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } n \geq 4 \\ \frac{1}{(1-R^2)^2} \cdot \left(1 + \frac{\pi^2}{4 \operatorname{Artanh}^2 R} \right) & \text{für } n = 3, D = B_R(0). \end{cases}\end{aligned}$$

- *Beispiel 3:*

$$\begin{aligned}g_{ij} &= \rho^2 \delta_{ij} \text{ (}\mathbb{H}^n\text{-Metrik)} \\ \sigma_2 &= \frac{1-|x|^2}{1+|x|^2}\end{aligned}$$

Dann ist $g'_{ij} = \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^2 \delta_{ij}$ (\mathbb{S}^n -Metrik), $R = -n(n-1)$ und $R' = n(n-1)$

(vergl. [BBF]). Setzt man dies in Formel (6.17) ein, so folgt

$$\begin{aligned}
 \mu_\sigma^* &= \sup_{x \in D} \left(\frac{1 + |x|^2}{1 - |x|^2} \right)^2 \left(\nu_\rho^* - \frac{n(n-2)}{4} - \frac{n(n-2)}{4} \left(\frac{1 - |x|^2}{1 + |x|^2} \right)^2 \right) \\
 &= \sup_{x \in D} \left(\frac{1 + |x|^2}{1 - |x|^2} \right)^2 \cdot \left(\nu_\rho^* - \frac{n(n-2)}{4} \right) - \frac{n(n-2)}{4} \\
 &= \begin{cases} -\frac{n(n-2)}{4} & \text{für } n \geq 4 \\ -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1+R^2}{1-R^2} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{\pi^2}{4 \operatorname{Arctanh}^2 R} \right) & \text{für } n = 3, D = B_R(0). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Die mit Hilfe der Yamabe-Gleichung berechneten Werte stimmen mit den unter „Anwendung I“ berechneten Werten für μ_σ^* überein. Deswegen wird hier auf eine Erläuterung verzichtet.

7 p -Laplace Gleichungen im \mathbb{H}^n

Es sei $D' \subset \mathbb{H}^n$ ein beschränktes Gebiet mit genügend glattem Rand und $1 < p < n$. Gesucht wird nach Lösungen $u \in H_0^{1,p}(D')$ des verallgemeinerten Brézis-Nirenberg Problems

$$\begin{aligned} \Delta_{p,\mathbb{H}^n} u + \lambda u^{p-1} + u^{p^*-1} &= 0 && \text{in } D' \\ u &> 0 && \text{in } D' \\ u &= 0 && \text{auf } D'. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Hierbei ist Δ_{p,\mathbb{H}^n} der p -Laplace-Beltrami-Operator, $p^* = \frac{np}{n-p}$ der kritische Sobolev-exponent und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

Verwendet man das konforme Kugelmodell des hyperbolischen Raumes, so lautet das Randwertproblem (7.1) in euklidischen Koordinaten

$$\begin{aligned} \rho^{-n} \nabla(\rho^{n-p} |\nabla u|^{p-2} \nabla u) + \lambda u^{p-1} + u^{p^*-1} &= 0 && \text{in } D \\ u &> 0 && \text{in } D \\ u &= 0 && \text{auf } D \end{aligned} \quad (7.2)$$

mit $\rho(x) = \frac{2}{1-|x|^2}$ in $D \subset B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$.

Ein allgemeines Resultat für Randwertprobleme dieser Art findet sich in [Eg2]. Egenell betrachtet für beschränkte, glatte Gebiete $D \subset \mathbb{R}^n$ und $1 < p < n$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \nabla(f |\nabla u|^{p-2} \nabla u) + \lambda h u^{p-1} + b u^{p^*-1} &= 0 && \text{in } D \\ u &> 0 && \text{in } D \\ u &= 0 && \text{auf } D, \end{aligned} \quad (7.3)$$

wobei f , b und h beschränkte, meßbare Funktionen mit $b, h \geq 0$, $f \geq c > 0$ in D sind, und $b, h \not\equiv 0$. Bezeichnet man mit

$$\lambda_1 := \inf_{\substack{u \in H_0^{1,p}(D) \\ u \neq 0}} \frac{\int_D |\nabla u|^p f \, dx}{\int_D u^{p^*} h \, dx}$$

den „ersten Eigenwert“ von

$$\begin{aligned} -\nabla(f|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= \lambda hu^{p-1} && \text{in } D \\ u &= 0 && \text{auf } D, \end{aligned}$$

so gilt

Lemma 7.1 ([Eg2]) *Es existiert eine Konstante $\lambda^* < \lambda_1$ so, daß das Randwertproblem (7.3) für $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_1)$ eine Lösung $u \in H_0^{1,p}(D)$ besitzt. Für $\lambda \geq \lambda_1$ existiert keine Lösung.*

Für das verallgemeinerte Brézis-Nirenberg Problem (7.1) folgt

Satz 9

Es sei $D' \subset \mathbb{H}^n$ ein beschränktes Gebiet mit genügend glattem Rand und $1 < p < n$. Es sei λ_1 der erste Dirichlet-Eigenwert des p -Laplace-Beltrami-Operators $-\Delta_{p,\mathbb{H}^n}$ auf D' .

Dann existiert ein $\lambda^ < \lambda_1$ so, daß (7.1) für $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_1)$ eine Lösung $u \in H_0^{1,p}(D)$ besitzt. Für $\lambda \geq \lambda_1$ existiert keine Lösung.*

Beweis: Mit $f = \rho^{n-p}$, $h = \rho^n$ und $b = \rho^n$ hat das verallgemeinerte Brézis-Nirenberg Problem in euklidischen Koordinaten (Formel (7.2)) die Form (7.3) und erfüllt alle Voraussetzungen des Lemmas 7.1. Somit folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 7.1 Jede Lösung von (7.1) liegt in $C^{1,\alpha}(\overline{D'})$ für ein $\alpha \in (0, 1)$ (vergl. [To]).

Für $p = 2$ kann der Wert von λ^* exakt angegeben werden (vergl. Satz 5 und Satz 6). Im allgemeineren Fall gilt für kleine Kugeln $\mathfrak{B}_\theta(0) \subset \mathbb{H}^n$ das folgende Nichtexistenzresultat:

Satz 10

Es sei $\mathfrak{B}_\theta(0) \subset \mathbb{H}^n$, $\theta \lll \infty$ und $1 < p < n$. Es sei $\lambda < 0$. Dann existiert keine radialsymmetrische Lösung $u \in C^2(\overline{D'})$ von (7.1).

Beweis: Es sei $u = u(r)$, $r = |x|$ eine radialsymmetrische Lösung des Randwertproblems (7.2). Diese ist positiv und genügt der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} (p-1)|u'|^{p-2}u'' + \left((n-p)\rho r + \frac{(n-1)}{r} \right) |u'|^{p-2}u' \\ + \lambda \rho^p u^{p-1} + \rho^p u^{p^*-1} = 0 \quad \text{in } (0, R) \end{aligned} \quad (7.4)$$

mit den Randbedingungen

$$u(R) = 0 \quad (7.5)$$

und

$$u'(0) = 0, \quad (7.6)$$

wobei $R = \tanh \frac{\theta}{2} \ll 1$.

Die Lösung des Randwertproblems (7.4) - (7.6) ist ein kritischer Punkt des Variationsproblems

$$\inf_{\substack{u \in H_0^{1,p}(0,R) \\ u(R)=0}} \int_0^R \mathcal{F}(r, u, u') \, dr. \quad (7.7)$$

wobei

$$\mathcal{F}(r, u, u') = \left(-\frac{1}{p} \rho^{n-p} |u'|^p + \frac{\lambda}{p} \rho^n u^p + \frac{1}{p^*} \rho^n u^{p^*} \right) r^{n-1}. \quad (7.8)$$

Pucci und Serrin haben in [PuS] gezeigt, daß ein kritischer Punkt des Variationsproblems (7.7) unter gewissen, hier gegebenen Voraussetzungen an \mathcal{F} für Funktionen a und h in $C^1((0, R)) \cap C([0, R])$ die Integralidentität

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(R, 0, u') - u' \cdot \mathcal{F}_{u'}(R, 0, u') \\ &= \int_0^R \left\{ \mathcal{F}(r, u, u') \cdot h' + h \cdot \mathcal{F}_r(r, u, u') - (u'h' + ua') \cdot \mathcal{F}_{u'}(r, u, u') \right. \\ & \quad \left. - a \cdot (u' \cdot \mathcal{F}_{u'}(r, u, u') + u \cdot \mathcal{F}_u(r, u, u')) \right\} dr \quad (7.9) \end{aligned}$$

erfüllt. Setzt man (7.8) in (7.9) ein, so erhält man nach einigem Rechenaufwand

$$\begin{aligned} & \frac{p-1}{p} \rho^{n-p}(R) |u'(R)|^p R^{n-1} h(R) \\ &= \int_0^R \left(\frac{p-1}{p} h' - \frac{n-p}{p} \rho r h - \frac{n-1}{p} r^{-1} h + a \right) \rho^{n-p} |u'|^p r^{n-1} \, dr \\ &+ \lambda \cdot \int_0^R \left(\frac{1}{p} h' + \frac{n}{p} \rho r h + \frac{n-1}{p} r^{-1} h - a \right) \rho^n u^p r^{n-1} \, dr \quad (7.10) \\ &+ \int_0^R \left(\frac{1}{p^*} h' + \frac{n}{p^*} \rho r h + \frac{n-1}{p^*} r^{-1} h - a \right) \rho^n u^{p^*} r^{n-1} \, dr \\ &+ \int_0^R \rho^{n-p} |u'|^{p-2} u' a' r^{n-1} \, dr. \end{aligned}$$

Wählt man $a(r) = a$ konstant und $h(r)$ als Lösung der Differentialgleichung

$$h'(r) = -n\rho(r)r h(r) - (n-1)r^{-1}h + ap^* \quad \text{in } (0, R), \quad (7.11)$$

so verschwinden die beiden letzten Integrale und Formel (7.10) vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} & \frac{p-1}{p} \rho^{n-p}(R) |u'(R)|^p R^{n-1} h(R) \\ &= \int_0^R \left(\frac{(n-1)p}{n-p} a - (n-1)\rho r h - (n-1)r^{-1}h \right) \rho^{n-p} |u'|^p r^{n-1} dr \\ &+ \lambda \cdot \int_0^R a \frac{p}{n-p} \rho^n u^p r^{n-1} dr. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Mit Hilfe von Maple löst man die zu der inhomogenen Differentialgleichung (7.11) gehörende homogene Gleichung und ermittelt im Anschluß daran durch Variation der Konstanten eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Es ergibt sich als allgemeine Lösung

$$h(r) = a \cdot C \cdot \frac{(-1)^n (1-r^2)^n}{r^{n-1}} + a \cdot p^* \cdot (1-r^2)^n \cdot r \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{k! (n+2k)} \cdot \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)}. \quad (7.13)$$

Wählt man $C = (-1)^n$, so läßt sich $h(r)$ darstellen als $h(r) = a \cdot \tilde{h}(r)$, wobei

$$\tilde{h}(r) = (1-r^2)^n \frac{1}{r^{n-1}} + p^* \cdot (1-r^2)^n \cdot r \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{k! (n+2k)} \cdot \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)}$$

ist. Gleichung (7.12) hat somit die von a unabhängige Form

$$\begin{aligned} & \frac{p-1}{p} \rho^{n-p}(R) |u'(R)|^p R^{n-1} \tilde{h}(R) \\ &= \int_0^R \left(\frac{(n-1)p}{n-p} - (n-1)\rho r \tilde{h} - (n-1)r^{-1}\tilde{h} \right) \rho^{n-p} |u'|^p r^{n-1} dr \\ &+ \lambda \cdot \int_0^R \frac{p}{n-p} \rho^n u^p r^{n-1} dr. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Die Funktion $\tilde{h}(r)$ ist strikt positiv in $(0, R)$ und groß für $R \ll 1$. Also dominieren in der Klammer

$$\left(\frac{(n-1)p}{n-p} - (n-1)\rho r \tilde{h} - (n-1)r^{-1}\tilde{h} \right)$$

aus dem ersten Integral auf der rechten Seite der Gleichung die beiden Terme, die \tilde{h} enthalten, der Ausdruck in der Klammer ist strikt negativ falls R klein genug ist.

Somit ist auch das Integral strikt negativ.

Das zweite Integral ist strikt positiv. Da nach Voraussetzung gilt $\lambda < 0$ folgt, daß der zweite Ausdruck ebenfalls strikt negativ ist. Somit ist die rechte Seite der Gleichung (7.14) strikt negativ für kleine R .

Da die linke Seite der Gleichung positiv ist, ergibt sich ein Widerspruch. Also kann auf kleinen Kugeln keine radialsymmetrische Lösung des verallgemeinerten Brézis-Nirenberg Problems existieren. \square

Bemerkung 7.2 Somit ist auf kleinen Kugeln der Wert 0 eine untere Schranke für λ^* . Dies entspricht den Ergebnissen für $p = 2$, die vermuten lassen, daß gilt $\lambda^* \geq 0$.

Offene Frage: Welchen Wert hat λ^* für $p \neq 2$?

A Anhang

A.1 Eine Transformation des Brezis-Nirenberg Problems

Es sei $D' \subset \mathbb{H}^n$, $n \geq 3$ ein beschränktes Gebiet, wobei der Rand dieses Gebietes so glatt sei, daß alle nötigen Rechen-Operationen (insbesondere die partielle Integration) erlaubt sind.

Es sei $D \subset B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ die zugehörige Menge in euklidischen Koordinaten, sowie $2^* = \frac{2n}{n-2}$ der kritische Sobolevexponent und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

Eine Lösung $u \in H_0^{1,2}(D)$ des Brezis-Nirenberg Problems

$$\begin{aligned} \rho^{-n} \nabla(\rho^{n-2} \nabla u) + \lambda u + u^{2^*-1} &= 0 && \text{in } D \\ u &> 0 && \text{in } D \\ u &= 0 && \text{auf } \partial D, \end{aligned} \quad (\text{BN}^*)$$

wobei $\rho(x) = \frac{2}{1-|x|^2}$ in D ist, erfüllt die Integralgleichung

$$\int_D |\nabla u|^2 \rho^{n-2} dx - \lambda \int_D u^2 \rho^n dx - \int_D |u|^{2^*} \rho^n dx = 0. \quad (\text{A.1})$$

Um das Gewicht ρ^{n-2} im ersten Integral zu eliminieren, definieren wir die Funktion $v \in H_0^{1,2}(D)$ durch $v(x) := \rho^{\frac{n-2}{2}}(x) u(x)$. Es gilt

$$\nabla u = -\frac{n-2}{2} \rho^{-\frac{n}{2}+2} v \cdot x + \rho^{-\frac{n}{2}+1} \nabla v = \rho^{-\frac{n}{2}+1} \left(-\frac{n-2}{2} \rho v \cdot x + \nabla v \right)$$

sowie

$$|\nabla u|^2 = \rho^{-n+2} \left(\frac{(n-2)^2}{4} \rho^2 v^2 |x|^2 - \frac{n-2}{2} \rho x \cdot \nabla(v^2) + |\nabla v|^2 \right).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit ρ^{n-2} , integriert über D und integriert partiell, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_D |\nabla u|^2 \rho^{n-2} dx &= \int_D |\nabla v|^2 dx + \frac{(n-2)^2}{4} \int_D v^2 |x|^2 \rho^2 dx \\ &\quad - \frac{n-2}{2} \int_D \nabla(v^2) \rho x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_D |\nabla v|^2 dx + \frac{(n-2)^2}{4} \int_D v^2 |x|^2 \rho^2 dx \\
 &\quad + \frac{n-2}{2} \int_D v^2 \rho^2 \left(\frac{2|x|^2}{2} + \frac{n-n|x|^2}{2} \right) dx \\
 &= \int_D |\nabla v|^2 dx + \frac{(n-2)^2}{4} \int_D v^2 |x|^2 \rho^2 dx \\
 &\quad + \frac{n(n-2)}{4} \int_D v^2 \rho^2 dx - \frac{(n-2)^2}{4} \int_D v^2 \rho^2 |x|^2 dx \\
 &= \int_D |\nabla v|^2 dx + \frac{n(n-2)}{4} \int_D v^2 \rho^2 dx
 \end{aligned}$$

Somit lautet die Integralgleichung (A.1) für $v = \rho^{\frac{n-2}{2}} u$

$$\begin{aligned}
 \int_D |\nabla v|^2 dx + \frac{n(n-2)}{4} \int_D v^2 \rho^2 dx \\
 - \lambda \int_D v^2 \rho^{-n+2} \rho^n dx - \int_D v^{2^*} \rho^{-\frac{n-2}{2} \frac{2n}{n-2}} \rho^n dx = 0,
 \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\int_D |\nabla v|^2 dx + \frac{n(n-2)}{4} \int_D v^2 \rho^2 dx - \lambda \int_D v^2 \rho^2 dx - \int_D v^{2^*} dx = 0. \quad (\text{A.2})$$

Es gilt auch, daß $v := \rho^{\frac{n-2}{2}} u \in H_0^{1,2}(D)$ eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned}
 \Delta v + \left(\lambda - \frac{n(n-2)}{4} \right) \rho^2 v + v^{2^*-1} &= 0 && \text{in } D \\
 v &> 0 && \text{in } D \\
 v &= 0 && \text{auf } \partial D
 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

ist. Die Transformation $v = \rho^{\frac{n-2}{2}} u$ überführt den Laplace-Beltrami-Operator in einen gewöhnlichen Laplace-Operator.

A.2 Der Eigenwert Λ_1 des Laplace-Operators $-\Delta$ auf $B_1(0)$

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \Lambda u && \text{in } B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \\ u &= 0 && \text{auf } \partial B_1(0) \end{aligned} \tag{A.4}$$

und erinnern daran, daß Λ ein Eigenwert des Operators $-\Delta$ ist, falls eine nichttriviale Lösung u von (A.4) existiert.

Insbesondere existiert ein kleinster Eigenwert $0 < \Lambda_1 < \Lambda_2 \leq \dots$, und eine zugehörige erste Eigenfunktion u_1 wechselt das Vorzeichen nicht.

Möchte man Λ_1 explizit ausrechnen, muß man das Randwertproblem (A.4) lösen. Dazu transformiert man die Differentialgleichung geeignet [Stra, Kapitel 10] und stellt fest, daß für $n \geq 3$ der erste Eigenwert Λ_1 das Quadrat der ersten positiven Nullstelle der Besselfunktion $\frac{n-2}{2}$ -ter Ordnung erster Gattung ist. Diese wird für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$J_{\frac{n-2}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}+2k}}{k! \Gamma\left(\frac{n-2}{2} + k + 1\right)}.$$

Mit Hilfe von Maple berechnet man beispielhaft für $n = 3$ bis $n = 30$:

$n = 3 :$	$\Lambda_1 = \pi^2 = 9.86959$
$n = 4 :$	$\Lambda_1 = 14.6820$
$n = 5 :$	$\Lambda_1 = 20.1907$
$n = 6 :$	$\Lambda_1 = 26.3746$
$n = 7 :$	$\Lambda_1 = 33.2175$
$n = 8 :$	$\Lambda_1 = 40.7064$
$n = 9 :$	$\Lambda_1 = 48.8312$
$n = 10 :$	$\Lambda_1 = 57.5829$
$n = 11 :$	$\Lambda_1 = 66.9543$
$n = 12 :$	$\Lambda_1 = 76.9389$
$n = 13 :$	$\Lambda_1 = 87.5312$
$n = 14 :$	$\Lambda_1 = 98.7263$
$n = 15 :$	$\Lambda_1 = 110.519$
$n = 16 :$	$\Lambda_1 = 122.908$
$n = 17 :$	$\Lambda_1 = 135.886$
$n = 18 :$	$\Lambda_1 = 149.453$

$n = 19 :$	$\Lambda_1 = 163.605$
$n = 20 :$	$\Lambda_1 = 178.337$
$n = 21 :$	$\Lambda_1 = 193.649$
$n = 22 :$	$\Lambda_1 = 209.540$
$n = 23 :$	$\Lambda_1 = 226.006$
$n = 24 :$	$\Lambda_1 = 243.042$
$n = 25 :$	$\Lambda_1 = 260.651$
$n = 26 :$	$\Lambda_1 = 278.830$
$n = 27 :$	$\Lambda_1 = 297.580$
$n = 28 :$	$\Lambda_1 = 316.890$
$n = 29 :$	$\Lambda_1 = 336.770$
$n = 30 :$	$\Lambda_1 = 357.210$

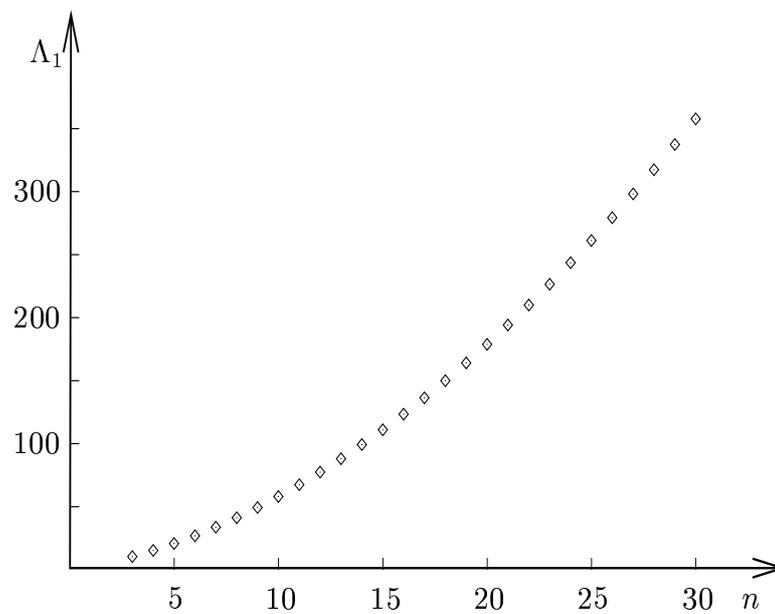


Abbildung A.1: Werte von Λ_1 für $n = 3$ bis $n = 30$

A.3 Zwei Ungleichungen

Wir zeigen die beiden im Beweis von Lemma 5.19 (Seite 69) gebrauchten Ungleichungen (5.94) und (5.98):

Lemma A.1 Für alle $\lambda \in (\frac{3}{4}, 1)$ und alle $r \in (0, R) \subset (0, 1)$ gilt

$$2r\sqrt{1-\lambda} \left(2 \cosh^2(2\sqrt{1-\lambda} \operatorname{Artanh} r) - 1 \right) - (1+r^2) \cdot \sinh(2\sqrt{1-\lambda} \operatorname{Artanh} r) \cdot \cosh(2\sqrt{1-\lambda} \operatorname{Artanh} r) \leq 0.$$

Beweis: Zur Vereinfachung der Notation setzt man $t := 2\sqrt{1-\lambda}$. Dann ist zu zeigen, daß für alle $t \in (0, 1)$ und für alle $r \in (0, R)$ gilt

$$rt \left(2 \cosh^2(t \operatorname{Artanh} r) - 1 \right) - (1+r^2) \cdot \sinh(t \operatorname{Artanh} r) \cdot \cosh(t \operatorname{Artanh} r) \leq 0. \quad (\text{A.5})$$

Stellt man die Hyperbel- und Areafunktionen mit Hilfe der Exponential- und Logarithmusfunktion dar, so folgt, daß die Ungleichung (A.5) äquivalent ist zu

$$(1+r^2+2rt) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{2t} - (1+r^2-2rt) \leq 0. \quad (\text{A.6})$$

Wir fassen die linke Seite der Ungleichung als Funktion von r und t auf und definieren $g : (-1, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} g(r, t) &:= -1 - r^2 + 2rt + (1+r^2+2rt) \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{2t} \\ &= -1 - r^2 + 2rt + (1+r^2+2rt) \exp \left(2t \ln \frac{1-r}{1+r} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Um zu zeigen, daß $g(r, t) \leq 0$ für $(r, t) \in (0, R) \times (0, 1)$ gilt, sei $r \in (0, R)$ beliebig, aber fest gewählt und $\tilde{g}_r(t) := g(r, t)$. Dann gilt: $\tilde{g}_r(t)$ ist streng konvex im Intervall $(0, 1)$, denn:

$\tilde{g}_r(t)$ ist streng konvex in $(0, 1)$ genau dann, wenn $\tilde{g}_r''(t) > 0$ für alle $t \in (0, 1)$ ist. Leitet man \tilde{g}_r zweimal ab und formt geeignet um, so folgt, daß die Bedingung $\tilde{g}_r''(t) > 0$ für alle $t \in (0, 1)$ äquivalent ist zu

$$2r + (1+r^2+2rt) \ln \frac{1-r}{1+r} < 0 \quad \text{für alle } t \in (0, 1). \quad (\text{A.8})$$

Für $t \in (0, 1)$ gilt $1 + r^2 < 1 + r^2 + 2rt < 1 + r^2 + 2r$. Daher ist

$$\begin{aligned}
 2r + (1 + r^2 + 2rt) \ln \frac{1-r}{1+r} &= 2r - (1 + r^2 + 2rt) \cdot 2 \operatorname{Artanh} r \\
 &< 2r - (1 + r^2) \cdot 2 \operatorname{Artanh} r \\
 &= 2 \left(r - (1 + r^2) \cdot \left(r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{2n+1} \right) \right) \\
 &= -2r^3 - 2(1 + r^2) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{2n+1} \\
 &< 0,
 \end{aligned}$$

die Bedingung (A.8) ist erfüllt und somit ist $\tilde{g}_r(t)$ streng konvex in $(0, 1)$.

Aus der strengen Konvexität von \tilde{g}_r folgt

$$\max_{t \in [0,1]} \tilde{g}_r(t) = \max \{ \tilde{g}_r(0), \tilde{g}_r(1) \} = 0$$

und weiter

$$\tilde{g}_r(t) < 0 \quad \text{für alle } t \in (0, 1).$$

Da $r \in (0, R)$ beliebig vorausgesetzt war, gilt schließlich

$$\tilde{g}_r(t) = g(r, t) < 0 \quad \text{für alle } t \in (0, 1) \text{ und } r \in (0, R).$$

Insbesondere ist die Ungleichung (A.6) gültig für alle $t \in (0, 1)$ und $r \in (0, R)$ und das Lemma ist bewiesen. \square

Lemma A.2 Für alle $\lambda \in \left(1, 1 + \frac{\pi^2}{16 \operatorname{Artanh}^2 R} \right]$ und alle $r \in (0, R) \subset (0, 1)$ gilt

$$\begin{aligned}
 2r \sqrt{\lambda - 1} \left(2 \cos^2(2 \sqrt{\lambda - 1} \operatorname{Artanh} r) - 1 \right) \\
 - (1 + r^2) \cdot \sin(2 \sqrt{\lambda - 1} \operatorname{Artanh} r) \cdot \cos(2 \sqrt{\lambda - 1} \operatorname{Artanh} r) \leq 0. \quad (\text{A.9})
 \end{aligned}$$

Beweis: Zur Vereinfachung der Notation setzt man $t := 2 \sqrt{\lambda - 1}$. Dann ist zu zeigen, daß für alle $t \in \left(0, \frac{\pi}{2 \operatorname{Artanh} R} \right]$ und für alle $r \in (0, R)$ gilt

$$r t \left(2 \cos^2(t \operatorname{Artanh} r) - 1 \right) - (1 + r^2) \cdot \sin(t \operatorname{Artanh} r) \cdot \cos(t \operatorname{Artanh} r) \leq 0. \quad (\text{A.10})$$

Elementare Umformungen führen auf die zu (A.10) äquivalente Ungleichung

$$2 r t \cos(2 t \operatorname{Artanh} r) \leq (1 + r^2) \cdot \sin(2 t \operatorname{Artanh} r). \quad (\text{A.11})$$

Für $r \in (0, R)$ und $t \in \left(0, \frac{\pi}{2 \operatorname{Artanh} R}\right]$ gilt

$$0 < 2t \operatorname{Artanh} r < 2t \operatorname{Artanh} R \leq 2 \cdot \frac{\pi}{2 \operatorname{Artanh} R} \cdot \operatorname{Artanh} R = \pi.$$

Somit ist $\sin(2t \operatorname{Artanh} r) > 0$ für alle $r \in (0, R)$ und $t \in \left(0, \frac{\pi}{2 \operatorname{Artanh} R}\right]$ und es folgt, daß die Ungleichung (A.11) äquivalent ist zu

$$2t \operatorname{Artanh} r \geq \operatorname{arccot} \frac{1+r^2}{2rt}. \quad (\text{A.12})$$

Wir definieren die Funktion $g : (0, 1) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(r, t) := 2t \operatorname{Artanh} r - \operatorname{arccot} \frac{1+r^2}{2rt} \quad (\text{A.13})$$

und zeigen, daß diese strikt positiv für alle $r \in (0, R)$ und alle $t \in \left(0, \frac{\pi}{2 \operatorname{Artanh} R}\right]$ ist.

Sei dazu $t \in \left(0, \frac{\pi}{2 \operatorname{Artanh} R}\right]$ beliebig, aber fest gewählt. Dann ist $\tilde{g}_t(r) := g(r, t)$ streng monoton wachsend in $(0, R)$, denn

$$\begin{aligned} \tilde{g}'_t(r) &= \frac{2t}{(1-r^2)(4r^2t^2 + (1+r^2)^2)} \cdot (4r^2t^2 + (1+r^2)^2 + (r^2-1)(1-r^2)) \\ &= \frac{2t}{(1-r^2)(4r^2t^2 + (1+r^2)^2)} \cdot (4r^2t^2 + 4r^2) \\ &> 0 \end{aligned}$$

für alle $r \in (0, R)$. Es folgt

$$\inf_{r \in (0, R)} \tilde{g}_t(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \tilde{g}_t(r) = 0$$

und weiter

$$\tilde{g}_r(t) \geq 0 \quad \text{für alle } r \in (0, R).$$

Da $t \in \left(0, \frac{\pi}{2 \operatorname{Artanh} R}\right]$ beliebig vorausgesetzt war, gilt schließlich

$$g(r, t) = \tilde{g}_r(t) \geq 0 \quad \text{für alle } r \in (0, R) \text{ und } t \in \left(0, \frac{\pi}{2 \operatorname{Artanh} R}\right].$$

Insbesondere ist die Ungleichung (A.12) für alle $r \in (0, R)$ und $t \in \left(0, \frac{\pi}{2 \operatorname{Artanh} R}\right]$ richtig und das Lemma ist bewiesen. □

Literaturverzeichnis

- [Ad] R.A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.
- [Aub] Th. Aubin. *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*. Springer-Verlag, 1998.
- [Bae] A. Baernstein II. *A unified approach to symmetrization*. Partial differential equations of elliptic type (Cortona, 1992). Sympos. Math., XXXV (1994), 47–91, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [B1] C. Bandle. *Isoperimetric inequalities and applications*. Monographs and Studies in Mathematics, 7; Pitman (Advanced Publishing Program), 1980.
- [B2] C. Bandle. *Semilinear elliptic boundary value problems with critical Sobolev exponent*. Proceedings of the 4th European Conference on Elliptic and Parabolic Problems, Rolduc and Gaeta 2001. World Scientific, 2002, 11–20.
- [BB] C. Bandle, R. Benguria. *The Brezis-Nirenberg Problem on S^3* . J. Differential Equations 178 (2002), no. 1, 264–279.
- [BBF] C. Bandle, A. Brillard, M. Flucher. *Green's function, harmonic transplantation, and best Sobolev constant in spaces of constant curvature*. Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), no. 3, 1103–1128.
- [BF] C. Bandle, M. Flucher. *Harmonic radius and concentration of energy; hyperbolic radius and Liouville's equations $\Delta U = e^U$ and $\Delta U = U^{(n+2)/(n-2)}$* . SIAM Rev. 38 (1996), no. 2, 191–238.
- [BeP] R. Benedetti, C. Petronio. *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Springer-Verlag, 1991.
- [BN] H. Brézis, L. Nirenberg. *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*. Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), no. 4, 437–477.
- [Bre] H. Brézis. *Elliptic equations with limiting Sobolev exponents - the impact of topology*. Comm. Pure Appl. Math. 39 (1986), no. S, suppl., S17–S39.

- [Bro] I.N. Bronštein. *Taschenbuch der Mathematik/Ilja N. Bronstein; Konstantin A. Semendjajew. Gerhard Musiol; Heiner Mühlig*. 2., überarb. und erw. Aufl. Deutsch, 1995.
- [BuH] C.J. Budd, A.R. Humphries. *Numerical and analytical estimates of existence regions for semi-linear elliptic equations with critical Sobolev exponents in cuboid and cylindrical domains*. Mathematics Preprint, University of Bath 99/22 (1999).
- [CH1] R. Courant, D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics, Volume I*. Interscience, New York, 1953.
- [CH2] R. Courant, D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics, Volume II*. Interscience, New York, 1962.
- [Eg1] H. Egnell. *Semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*. Arch. Rational Mech. Anal. 104 (1988), no. 1, 27–56.
- [Eg2] H. Egnell. *Existence and nonexistence results for m -Laplace equations involving critical Sobolev exponents*. Arch. Rational Mech. Anal. 104 (1988), no. 1, 57–77.
- [Ev] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. AMS, 1998.
- [GHL] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine. *Riemannian geometry. Second edition*. Springer-Verlag, 1990.
- [GNN] B. Gidas, Wei Ming Ni, L. Nirenberg. *Symmetry and related properties via the maximum principle*. Comm. Math. Phys. 68 (1979), no. 3, 209–243.
- [GrR] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products, 5th edition*. Academic Press Inc., 1994.
- [GT] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Second Edition*. Springer-Verlag, 1983.
- [Her] J. Hersch. *Transplantation harmonique, transplantation par modules, et théorèmes isopérimétriques*. Comment. Math. Helv. 44 (1969), 354–366.
- [Jo] J. Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis, Second Edition*. Springer-Verlag, 1998.
- [KwL] Man Nam Kwong, Yi Li. *Uniqueness of radial solutions of semilinear elliptic equations*. Transactions of the AMS, Vol. 333, no. 1 (1992), 339–363.

-
- [KuP] S. Kumaresan, J. Prajapat. *Analogue of Gidas-Ni-Nirenberg result in hyperbolic space and sphere*. Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 30 (1998), no. 1–2, 107–112.
- [Li] P.-L. Lions. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. II*. Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1985), no. 2, 45–121.
- [PS] G. Pólya, G. Szegő. *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1951.
- [PuS] P. Pucci, J. Serrin. *A general variational identity*. Indiana Univ. Math. J. 35 (1986), no.3, 681–703.
- [Ra] J.G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Springer-Verlag, 1994.
- [Rei] W. Reichel. *Uniqueness theorems for variational problems by the method of transformation groups*. Habilitationsschrift, Universität Basel, Schweiz, 2002.
- [Schö] R. Schoen. *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*. J. Differential Geom. 20 (1984), no. 2, 479–495.
- [Sta] S. Stapelkamp. *The Brezis-Nirenberg Problem on \mathbb{H}^n* . Proceedings of the 4th European Conference on Elliptic and Parabolic Problems, Rolduc and Gaeta 2001. World Scientific, 2002, 283–290.
- [Stra] W.A. Strauss. *Partial Differential Equations, An Introduction*. John Wiley & Sons Inc., 1992.
- [Stru] M. Struwe. *Variational Methods; Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, Third Edition*. Springer-Verlag, 2000.
- [Ta] G. Talenti. *Best constant in Sobolev inequality*. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 110 (1976), 353–372.
- [To] P. Tolksdorf. *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*. J. Differential Equations 51 (1984), no. 1, 126–150.
- [Tru] N.S. Trudinger. *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 22 (1968), 265–274.
- [Wa] W. Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen, 6. Auflage*. Springer-Verlag, 1996.

Curriculum Vitae

Name: Silke Ursula Stapelkamp
Geburtsdatum: 19. Dezember 1972
Geburtsort: Dinslaken, Deutschland
Eltern: Paul Stapelkamp
Ursula Stapelkamp, geb. Teichert

Ausbildung:

1979–1983 Grundschule, Dinslaken
1983–1992 Theodor-Heuss-Gymnasium, Dinslaken
16.06.1992 Abitur
01.09.1992–14.06.1994 Ausbildung zur Bankkauffrau, Dresdner Bank AG Filiale Duisburg
01.10.1994 Studienbeginn an der Universität zu Köln, Studienziel: Mathematik & Wirtschaftswissenschaften (Lehramt für die Sekundarstufe II)
01.10.1995 Studienfachwechsel, neues Studienziel: Mathematik (Diplom) mit Nebenfach Physik
02.06.1997 Vordiplom in Mathematik
01.10.1997–29.02.2000 Studentische Hilfskraft am Lehrstuhl von Prof. B. Kawohl am Mathematischen Institut der Universität zu Köln
07.02.2000 Diplom in Mathematik
seit 01.04.2000 Assistentin am Mathematischen Institut der Universität Basel. Arbeit an einer Dissertation unter Anleitung von Frau Prof. C. Bandle
27.02.2003 Doktorkolloquium

Meine Hochschulausbildung erhielt ich vor allem durch folgende Dozentinnen und Dozenten:

C. Bandle, P. Bundschuh, P. Fuchs, M. Herrmann, B. Kawohl, G. Thorbergsson, P. von Brentano, B. Huckestein, H. Micklitz