

Problème de Mordell-Lang modulo certaines sous-variétés abéliennes

Gaël Rémond et Evelina Viada

1 Introduction

Les résultats de cet article concernent les points algébriques d'une courbe plongée dans une puissance d'une courbe elliptique. Toutefois, pour présenter les problèmes et les résultats antérieurs, nous considérons d'abord une situation plus générale.

Soient A une variété semi-abélienne sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et C une courbe intègre tracée sur A . Pour un entier r avec $1 \leq r \leq g = \dim A$ et F une partie quelconque de $A(\bar{\mathbb{Q}})$, nous introduisons l'ensemble

$$S_r(C, F) = C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \bigcup_{\text{codim } B \geq r} F + B(\bar{\mathbb{Q}}), \quad (1.1)$$

où l'union porte sur toutes les sous-variétés semi-abéliennes B de A (c'est-à-dire les sous-groupes algébriques connexes) vérifiant la condition de dimension.

Nous souhaitons utiliser cette notation pour rapprocher deux types de résultats. Dans un premier temps, nous choisirons $r = g$. Nous avons d'abord un énoncé de type «Mordell-Lang» : les travaux de Vojta et de McQuillan entraînent en effet le résultat suivant.

Théorème 1.1. Si C n'est pas translatée d'une sous-variété semi-abélienne de A et si Γ est un sous-groupe de rang fini de $A(\bar{\mathbb{Q}})$ alors l'ensemble $S_g(C, \Gamma)$ est fini. \square

En effet, $S_g(C, \Gamma)$ n'est autre que $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma$.

Reçu le 13 janvier 2003.

Communiqué par Enrico Bombieri.

Il est possible de généraliser ceci en un «Mordell-Lang plus Bogomolov» selon la terminologie de B. Poonen. Pour cela, notons $h : A(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ une hauteur canonique et, si $\Gamma \subset A(\bar{\mathbb{Q}})$ et $\varepsilon \geq 0$, définissons

$$\Gamma_\varepsilon = \{x + y \mid x \in \Gamma, y \in A(\bar{\mathbb{Q}}), h(y) \leq \varepsilon\} \quad (1.2)$$

(que l'on peut voir comme un épaississement de Γ). Alors, d'après [8], nous avons

Théorème 1.2. Sous les hypothèses du [théorème 1.1](#), il existe $\varepsilon > 0$ pour lequel $S_g(C, \Gamma_\varepsilon)$ est fini. \square

L'autre famille de résultats concerne les petites valeurs de r . Nous dirons que la courbe C est transverse si elle n'est contenue dans aucun translaté de sous-variété semi-abélienne de A différente de A .

Le premier théorème est dû à Bombieri, Masser et Zannier (voir [1]) dans le cas torique :

Théorème 1.3. Si $A = \mathbb{G}_m^g$ et si C est transverse alors

- (1) l'ensemble $S_1(C, A_{\text{tors}})$ est de hauteur bornée ;
- (2) l'ensemble $S_2(C, A_{\text{tors}})$ est fini. \square

Ici la formulation diffère de celle de [1] où apparaît plutôt l'union de tous les sous-groupes algébriques de dimension donnée mais il est clair que cette dernière coïncide avec l'union des $A_{\text{tors}} + B$ où B est connexe.

Un analogue elliptique de ce résultat a été établi dans [10].

Théorème 1.4. Supposons que $A = E^g$ où E est une courbe elliptique et que C soit transverse. Alors

- (1) l'ensemble $S_1(C, A_{\text{tors}})$ est de hauteur bornée ;
- (2) si E est à multiplication complexe, $S_2(C, A_{\text{tors}})$ est fini ;
- (3) dans tous les cas, $S_r(C, A_{\text{tors}})$ est fini si $r \geq 2 + (g/2)$. \square

Le présent travail se veut une tentative de mélanger les deux types d'énoncés (théorèmes 1.1 et 1.2 d'une part et théorèmes 1.3 et 1.4 d'autre part). Il faut noter qu'ils ont déjà une intersection non triviale : la finitude de $S_g(C, A_{\text{tors}})$ résulte de chacun des théorèmes, ce qui correspond dans le cas abélien à la conjecture de Manin-Mumford prouvée par Raynaud. Nous nous intéressons ici aux ensembles de la forme $S_r(C, \Gamma_\varepsilon)$ et essayons de prouver des résultats de finitude pour r le plus petit possible.

Peu de choses peuvent être dites du cas $r = 1$. L'ensemble $S_1(C, A_{\text{tors}})$ étant toujours infini, nous pouvons au mieux espérer des bornes de hauteur. Dans cette direction, les méthodes de [1] ou [10] montrent facilement que si F est de hauteur bornée alors il en

va de même de $S_1(C, F)$ (sous les hypothèses des théorèmes 1.3 et 1.4). En revanche, dès qu'un groupe Γ n'est pas de torsion, $S_1(C, \Gamma)$ n'est pas de hauteur bornée.

Nous nous tournons donc vers le cas $r = 2$. Ici, il devient plus raisonnable de se demander si $S_2(C, \Gamma_\varepsilon)$ est fini pour ε assez petit. Voici les résultats que nous obtenons dans cette direction. Nous nous plaçons désormais dans le cas elliptique $A = E^g$ (donc la hauteur canonique introduite plus haut est la hauteur de Néron-Tate). Nous obtenons en premier lieu le résultat suivant.

Théorème 1.5. Soient E une courbe elliptique sur $\bar{\mathbb{Q}}$, g un entier et $A = E^g$. Soient encore $C \hookrightarrow A$ une courbe transverse et Γ un sous-groupe de rang fini de $A(\bar{\mathbb{Q}})$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $S_2(C, \Gamma_\varepsilon)$ est de hauteur bornée. \square

Nous avons ensuite des résultats de finitude. Pour énoncer le premier, définissons $r_0(\Gamma)$ comme le rang du sous-groupe de $E(\bar{\mathbb{Q}})$ engendré par les images de Γ à travers les différentes projections.

Théorème 1.6. Sous les hypothèses du théorème précédent et si $r \geq 2 + (r_0(\Gamma) + g)/2$ alors $S_r(C, \Gamma)$ est fini. Si de plus E admet des multiplications complexes alors $S_2(C, \Gamma)$ est fini. \square

Comme dans [10], la différence vient du fait que les estimations disponibles dans le cadre du problème de Lehmer pour les variétés abéliennes sont meilleures lorsqu'il y a multiplication complexe. A part cela, le traitement ci-après des deux cas est identique et le résultat se trouverait automatiquement amélioré par un progrès dans cette direction (par exemple la conjecture 1.6 formulée dans [2] entraînerait au moins la finitude de $S_3(C, \Gamma)$).

Finalement, remarquons que le théorème 1.6 permet de répondre (dans le cas elliptique) à une question posée par Bombieri, Masser et Zannier (dans le cas torique).

Théorème 1.7. Les conclusions (2) et (3) du théorème 1.4 sont vraies sous l'hypothèse plus faible que la courbe C n'est contenue dans aucun sous-groupe algébrique strict de A . \square

Expliquons l'idée de la preuve du théorème 1.5. Si nous fixons une sous-variété abélienne B de codimension 2, la finitude de $C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \Gamma_\varepsilon + B(\bar{\mathbb{Q}})$ provient du théorème 1.2 appliqué à $C/B \hookrightarrow A/B$. Dans ce cas, il est possible de montrer que la hauteur de cet ensemble est bornée grâce à une inégalité de Vojta comme dans [8]. Ici, bien sûr, B varie et nous avons besoin d'une propriété plus forte. Nous établissons en fait une inégalité de Vojta uniforme où la dépendance en B est explicite en nous appuyant sur les résultats de [9] (voir proposition 2.1).

Ensuite, s'il existe une suite de points de $S_2(C, \Gamma_\varepsilon)$ dont la hauteur tend vers l'infini, nous choisissons une sous-suite telle que les sous-variétés abéliennes B associées soient proches entre elles (en un sens à préciser). Cela fait, les inégalités obtenues pour ces différents B deviennent elles-mêmes proches et permettent alors de conclure comme dans le cas d'une seule inégalité.

Les théorèmes 1.6 et 1.7 s'obtiennent grâce aux arguments de [10]. Le théorème 1.5 remplace l'assertion (1) du théorème 1.4 pour borner la hauteur et permet de s'affranchir de l'hypothèse de transversalité. On relie $S_r(C, \Gamma)$ à un ensemble de la forme $S_r(C', A'_{\text{tors}})$ où C' est une courbe sur $A' = E^{g+s}$ obtenue en rajoutant des facteurs constants : de la sorte C' n'est pas transverse mais le théorème 1.5 assure tout de même que $S_2(C', A'_{\text{tors}})$ est de hauteur bornée. Par le résultat de [10] (voir proposition 4.1 ci-dessous), il s'ensuit que $S_r(C', A'_{\text{tors}})$ est fini et, en retour, l'ensemble correspondant $S_r(C, \Gamma)$ est fini.

Précisons quelques notations. Soit \mathcal{L}_0 un faisceau inversible très ample et symétrique sur E . Pour simplifier, nous supposons que \mathcal{L}_0 est la puissance quatrième d'un faisceau symétrique. Nous verrons l'anneau $\text{End}(E)$ comme plongé dans \mathbb{C} et ceci nous permet d'écrire \bar{a} et $|a|^2 = a\bar{a} \in \mathbb{N}$ pour $a \in \text{End}(E)$. Dans ces conditions, nous avons d'une part un isomorphisme $a^*\mathcal{L}_0 \simeq \mathcal{L}_0^{\otimes |a|^2}$ pour tout $a \in \text{End}(E)$ et d'autre part les sections globales de \mathcal{L}_0 induisent un plongement $j_0 : E \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N_0}$ projectivement normal. Soient $h : E(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$ la hauteur de Weil donnée par j_0 et $x \mapsto |x|^2$ la hauteur de Néron-Tate associée. Introduisons enfin un réel c_{NT}^0 tel que $|h(x) - |x|^2| \leq c_{\text{NT}}^0$ pour tout $x \in E(\bar{\mathbb{Q}})$.

Passons à E^g . Nous noterons toujours q_1, \dots, q_g les différentes projections $E^g \rightarrow E$ alors que p_1 et p_2 désigneront les projections pour un produit de deux facteurs comme par exemple $C \times C \rightarrow C$ ou $E^g \times E^g \rightarrow E^g$. Nous posons $\mathcal{L} = \bigotimes_{i=1}^g q_i^* \mathcal{L}_0$ et soit $j : E^g \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$ l'immersion fermée déduite de j_0 par un morphisme de Segre (donc en particulier $N+1 = (N_0+1)^g$). Nous continuons à noter $h(x)$ et $|x|^2$ les hauteurs associées sur $E^g(\bar{\mathbb{Q}})$ et nous écrirons $c_{\text{NT}} = gc_{\text{NT}}^0$ une constante de comparaison comme plus haut.

Nous démontrons plus bas le théorème 1.5 pour ce choix de hauteur mais, bien entendu, la validité de l'énoncé pour n'importe quel autre choix en découle immédiatement.

2 Inégalité de Vojta uniforme

2.1 Énoncé

Dans la proposition ci-dessous, plutôt que de considérer vraiment un quotient $E^g \rightarrow E^g/B$, nous utilisons un morphisme $\varphi : E^g \rightarrow E^2$ qui permet plus de souplesse. Un tel

φ s'écrit

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_g \\ b_1 & \cdots & b_g \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

avec $a_i, b_i \in \text{End}(E)$ pour $1 \leq i \leq g$ et $\varphi_j \in \text{Hom}(E^g, E)$ pour $1 \leq j \leq 2$.

Notons $\psi \mapsto \psi^\dagger$ l'involution de Rosati induite par \mathcal{L} sur $\text{End}(E^g)$ et $\text{End}^\dagger(E^g)$ le sous-module fixé par icelle. Remarquons que ceci ne dépend pas du choix de \mathcal{L}_0 car l'involution de Rosati sur E est canonique (c'est la conjugaison) et donc si ψ correspond à une matrice $M \in M_g(\text{End}(E))$ alors ψ^\dagger correspond à ${}^t\bar{M}$.

Nous introduisons la forme bilinéaire

$$\text{End}(E^g) \times \text{End}(E^g) \longrightarrow \text{End}(E), \quad (\psi_1, \psi_2) \longmapsto \psi_1 \bullet \psi_2 = \text{Tr}(\psi_1 \circ \psi_2^\dagger) \tag{2.2}$$

et notons $\|\psi\|^2 = \psi \bullet \psi \in \mathbb{Z}$ pour $\psi \in \text{End}(E^g)$. Cette application induit une norme sur $\text{End}(E^g) \otimes \mathbb{R}$ (voir [5, page 192]). Pour profiter de ces données, nous verrons souvent dans la suite $\text{Hom}(E^g, E^2)$ (resp., $\text{Hom}(E^g, E)$) comme sous-module de $\text{End}(E^g)$ grâce à l'injection de E^2 (resp., E) suivant les deux premiers facteurs (resp., le premier facteur) de E^g . En particulier, nous utiliserons constamment la norme de $\varphi \in \text{Hom}(E^g, E^2)$ égale avec les notations ci-dessus à la racine carrée de $\sum_{i=1}^g |a_i|^2 + |b_i|^2$. Avec cette convention, nous avons également $\varphi_1 \bullet \varphi_2 = \sum_{i=1}^g a_i \bar{b}_i$.

Ceci permet de définir

$$\Phi = \{ \varphi \in \text{Hom}(E^g, E^2) \mid \varphi_1 \bullet \varphi_2 = 0 \text{ et } 0 < \|\varphi_1\| \leq \|\varphi_2\| \leq 2\|\varphi_1\| \} \tag{2.3}$$

et, par les mêmes conditions, $\Phi_{\mathbb{R}} \subset \text{Hom}(E^g, E^2) \otimes \mathbb{R}$.

Notre but consiste à montrer le résultat suivant.

Proposition 2.1. Si C est une courbe intègre transverse dans E^g , il existe des réels $c_1, c_2, c_3 > 0$ tels que pour tous points $x, y \in C(\bar{\mathbb{Q}})$ avec $|x| \geq c_3$ et $|y| \geq c_3$, tout entier $s \geq c_2$ et tout morphisme $\varphi \in \Phi$, nous ayons

$$|s\varphi(x) - \varphi(y)|^2 \geq \frac{\|\varphi\|^2}{c_1} (s^2|x|^2 + |y|^2). \tag{2.4}$$

□

2.2 Préliminaires

Nous obtiendrons cette inégalité comme conséquence du théorème principal de [9]. Parce que la condition essentielle d'application de ce résultat concerne la minoration d'un

certain nombre d'intersection sur $C \times C$, nous commençons par considérer

$$A^1(C \times C) = (\text{Pic}(C \times C)/\text{Pic}^0(C \times C)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = (\text{Pic}(C \times C)/\sim) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

où \sim désigne l'équivalence numérique. Rappelons que grâce aux projections p_1 et $p_2 : C \times C \rightarrow C$ nous avons une inclusion

$$p_1^*A^1(C) \oplus p_2^*A^1(C) \subset A^1(C \times C). \quad (2.6)$$

Notre premier lemme donne une description d'une partie du quotient en termes de E^g grâce à l'hypothèse que C est transverse. A un couple $(s, \psi) \in \mathbb{Z} \times \text{End}(E^g)$, nous associons le morphisme $\beta_{s,\psi} : C \times C \rightarrow E^g$ donné sur les points par $\beta_{s,\psi}(x, y) = s\psi(x) - \psi(y)$.

Lemme 2.2. Il existe une application linéaire

$$\alpha : \text{End}^\dagger(E^g) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \longrightarrow A^1(C \times C) \quad (2.7)$$

induisant une injection

$$\text{End}^\dagger(E^g) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \hookrightarrow A^1(C \times C)/p_1^*A^1(C) \oplus p_2^*A^1(C) \quad (2.8)$$

et telle que, pour tout $\psi \in \text{End}(E^g)$, nous ayons

$$\beta_{s,\psi}^* \mathcal{L} \simeq p_1^* \left((\psi^* \mathcal{L})|_C \right)^{\otimes s^2} \otimes \alpha(\psi^\dagger \circ \psi)^{\otimes s} \otimes p_2^* \left((\psi^* \mathcal{L})|_C \right). \quad (2.9)$$

□

Démonstration. Notons ici $A = E^g$ et $\nu : C' \rightarrow C$ la normalisation de C . Le morphisme $C' \rightarrow C \hookrightarrow A$ se factorise en

$$C' \xrightarrow{f} J \xrightarrow{q} A, \quad (2.10)$$

où J est la jacobienne de C' , q un morphisme de variétés abéliennes et f un morphisme d'Albanese composé avec une translation. Nous avons un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \text{Pic}(A)/\text{Pic}^0(A) & \xrightarrow{\phi} & \text{Hom}(A, A^\vee) & \xrightarrow{(\text{id} \times \cdot)^* \mathcal{P}_A} & \text{Pic}(A \times A) \\ \downarrow q^* & & & & \downarrow (q \times q)^* \\ \text{Pic}(J)/\text{Pic}^0(J) & \xrightarrow{\phi} & \text{Hom}(J, J^\vee) & \xrightarrow{(\text{id} \times \cdot)^* \mathcal{P}_J} & \text{Pic}(J \times J), \end{array} \quad (2.11)$$

où ϕ se définit par $\phi_{\mathcal{M}}(x) = \tau_x^* \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}^{\otimes -1}$ et est injectif (voir [5, page 74]) et $\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_J$ sont les faisceaux de Poincaré. Ce diagramme commute en vertu de la formule

$$(\text{id} \times \phi_{\mathcal{M}})^* \mathcal{P}_A \simeq \text{add}^* \mathcal{M} \otimes p_1^* \mathcal{M}^{\otimes -1} \otimes p_2^* \mathcal{M}^{\otimes -1}, \tag{2.12}$$

où $\text{add} : A \times A \rightarrow A$ est l'addition (voir [5, page 131]), de la formule analogue pour J et du fait que q est un morphisme. Par ailleurs, l'application induite par q^* est injective car, comme C est transverse dans A , le morphisme q doit être surjectif.

Il résulte à présent du fait que J^\vee représente le foncteur de Picard de C' que la composée

$$\begin{aligned} \text{Hom}(J, J^\vee) &\xrightarrow{(\text{id} \times \cdot)^* \mathcal{P}_J} \text{Pic}(J \times J) \\ &\xrightarrow{(f \times f)^*} \text{Pic}(C' \times C') / p_1^* \text{Pic}(C') \oplus p_2^* \text{Pic}(C') \end{aligned} \tag{2.13}$$

est un isomorphisme (lorsque f est un morphisme d'Albanese, cela vient de [4, Summary 6.11, page 189] ; ici il faut de plus tenir compte de la translation mais elle ne modifie $\text{Pic}(J \times J)$ que par un élément de $\text{Pic}^0(J \times J)$ dont l'image appartient donc à $p_1^* \text{Pic}(C') \oplus p_2^* \text{Pic}(C')$).

Nous en déduisons que le morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \text{Pic}(A) / \text{Pic}^0(A) &\longrightarrow \text{Pic}(C \times C) \\ \mathcal{M} &\longmapsto (\text{add}^* \mathcal{M}^{\otimes -1} \otimes p_1^* \mathcal{M} \otimes p_2^* \mathcal{M})|_{C \times C} \end{aligned} \tag{2.14}$$

fournit une injection

$$\text{Pic}(A) / \text{Pic}^0(A) \longrightarrow \text{Pic}(C \times C) / p_1^* \text{Pic}(C) \oplus p_2^* \text{Pic}(C) \tag{2.15}$$

puisque c'est le cas après l'application de $(\nu \times \nu)^*$. Finalement, grâce à l'isomorphisme

$$\text{End}(A) \xrightarrow{\phi_{\mathcal{L}} \circ} \text{Hom}(A, A^\vee), \tag{2.16}$$

$\text{End}^\dagger(A) \otimes \mathbb{R}$ s'identifie à $(\text{Pic}(A) / \text{Pic}^0(A)) \otimes \mathbb{R}$ (voir [5, page 190]). Par composition, nous pouvons définir α par

$$\alpha(\psi) = (\text{id} \times \phi_{\mathcal{L}} \circ \psi)^* \mathcal{P}_A^{\otimes -1} |_{C \times C}. \tag{2.17}$$

Afin d'avoir la formule pour $\beta_{s, \psi}^* \mathcal{L}$ il suffit en vertu du théorème du cube de montrer

$$\alpha(\psi^\dagger \circ \psi) = (\psi \times \psi)^* (\text{add}^* \mathcal{L}^{\otimes -1} \otimes p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L}) |_{C \times C}. \tag{2.18}$$

Or ce second membre s'écrit comme la restriction à $C \times C$ de

$$\begin{aligned} (\psi \times \psi)^*(\text{id} \times \phi_{\mathcal{L}})^* \mathcal{P}_A^{\otimes -1} &\simeq (\text{id} \times \phi_{\mathcal{L}} \circ \psi)^*(\psi \times \text{id})^* \mathcal{P}_A^{\otimes -1} \\ &\simeq (\text{id} \times \phi_{\mathcal{L}} \circ \psi)^*(\text{id} \times \psi^\vee)^* \mathcal{P}_A^{\otimes -1} \end{aligned} \tag{2.19}$$

par définition du dual de ψ et il reste seulement à remarquer que $\psi^\vee \circ \phi_{\mathcal{L}} \circ \psi = \phi_{\mathcal{L}} \circ \psi^\dagger \circ \psi$ (définition de ψ^\dagger). ■

Nous utiliserons la conséquence suivante du théorème de l'indice de Hodge (nous noterons dans la suite \mathcal{M}^2 une auto-intersection $\mathcal{M} \cdot \mathcal{M}$).

Lemme 2.3. Si \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 sont deux éléments numériquement effectifs indépendants de $A^1(C \times C)$ alors $\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2 > 0$. □

Démonstration. Choisissons \mathcal{H} ample sur $C \times C$ et formons $\mathcal{M} = (\mathcal{L}_2 \cdot \mathcal{H})\mathcal{L}_1 - (\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{H})\mathcal{L}_2$ dans $A^1(C \times C)$. Puisque \mathcal{M} n'est pas numériquement trivial et que $\mathcal{M} \cdot \mathcal{H} = 0$, le théorème de l'indice de Hodge entraîne $\mathcal{M}^2 < 0$ soit

$$(\mathcal{L}_2 \cdot \mathcal{H})^2 \mathcal{L}_1^2 + (\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{H})^2 \mathcal{L}_2^2 < 2(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{H})(\mathcal{L}_2 \cdot \mathcal{H})(\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2). \tag{2.20}$$

En particulier, cela donne bien $\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2 > 0$. ■

Énonçons maintenant les minoration de nombre d'intersection que nous emploierons.

Lemme 2.4. Si C est une courbe transverse il existe un entier $\theta \geq 1$ tel que, pour tout entier s non nul, tout $\varphi \in \Phi$ et tout $x \in C(\bar{\mathbb{Q}})$, nous ayons

$$\begin{aligned} (\beta_{s,\varphi}^* \mathcal{L})^2 &\geq \theta^{-1} \|\varphi\|^4 s^2, \\ \beta_{s,\varphi}^* \mathcal{L} \cdot C \times \{x\} &\geq \theta^{-1} \|\varphi\|^2 s^2, \\ \beta_{s,\varphi}^* \mathcal{L} \cdot \{x\} \times C &\geq \theta^{-1} \|\varphi\|^2. \end{aligned} \tag{2.21} \quad \square$$

Démonstration. D'après le résultat d'homogénéité de Faltings (voir [3, Lemme 4.2]), les trois nombres d'intersections ont la même homogénéité en s que la minoration espérée. Par suite, nous supposons dorénavant $s = 1$. Par ailleurs remarquons que les deux derniers nombres à minorer ne dépendent pas de x . Il suffit donc de prouver que les deux fonctions

$$\varphi \longmapsto \|\varphi\|^{-4} (\beta_{1,\varphi}^* \mathcal{L})^2, \quad \varphi \longmapsto \|\varphi\|^{-2} \beta_{1,\varphi}^* \mathcal{L} \cdot C \times \{x\} \tag{2.22}$$

sont minorées par un réel strictement positif sur Φ .

Au vu du [lemme 2.2](#), l'application $\varphi \mapsto \beta_{1,\varphi}^* \mathcal{L}$ est quadratique et s'étend à $\text{Hom}(E^g, E^2) \otimes \mathbb{R}$. Par suite, la propriété ci-dessus équivaut à la non-annulation des fonctions précédentes (continues) sur le compact

$$K = \{\varphi \in \Phi_{\mathbb{R}} \mid \|\varphi\| = 1\}. \tag{2.23}$$

La fonction $\beta_{1,\varphi}^* \mathcal{L} \cdot C \times \{x\}$ ne s'annule pas sur $\text{Hom}(E^g, E^2) \setminus \{0\}$ car sinon $\beta_{1,\varphi}(C \times \{x\}) = 0$ et ceci implique que C est inclus dans un translaté du noyau de φ . Nous avons donc affaire à une forme quadratique positive à valeurs entières non nulles sur $\text{Hom}(E^g, E^2) \setminus \{0\}$. Par suite, elle est définie positive et donc, en particulier, non nulle sur K .

Pour l'autre minoration, nous écrivons

$$(\beta_{1,\varphi}^* \mathcal{L})^2 = (\beta_{1,\varphi_1}^* \mathcal{L} \otimes \beta_{1,\varphi_2}^* \mathcal{L})^2 \geq 2\beta_{1,\varphi_1}^* \mathcal{L} \cdot \beta_{1,\varphi_2}^* \mathcal{L}. \tag{2.24}$$

En vertu du [lemme 2.3](#), il suffit de prouver que $\beta_{1,\varphi_1}^* \mathcal{L}$ et $\beta_{1,\varphi_2}^* \mathcal{L}$ sont indépendants dans $A^1(C \times C)$. Or, pour $\varphi \in K$, les éléments $\varphi_1^\dagger \circ \varphi_1$ et $\varphi_2^\dagger \circ \varphi_2$ sont indépendants dans $\text{End}(E^g) \otimes \mathbb{R}$ par exemple car

$$(\varphi_1^\dagger \circ \varphi_1) \bullet (\varphi_2^\dagger \circ \varphi_2) = 0 \tag{2.25}$$

(et $\|\varphi_i^\dagger \circ \varphi_i\| = \|\varphi_i\|^2 \neq 0$). Le [lemme 2.2](#) donne alors la conclusion puisque $\varphi_i^\dagger \circ \varphi_i \in \text{End}^\dagger(E^g) \otimes \mathbb{R}$. ■

2.3 Démonstration de l'inégalité de Vojta

Comme annoncé, nous allons appliquer le résultat de [9]. Nous précisons donc à quelles données nous nous intéressons. Tout d'abord, le schéma initial est $X = C$ muni du plongement ι défini comme composé de $C \hookrightarrow E^g$ et $j : E^g \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^N$. Nous choisissons ensuite $m = 2, t_1 = t_2 = 2^{2g+1}, M = (N + 1)^{2^{2g+1}}$ et $\omega = 0$. Pour θ nous utilisons la valeur donnée par le [lemme 2.4](#). Quant à δ , qui représente essentiellement la hauteur de l'addition de E , nous le fixerons plus bas (sans le calculer explicitement).

Prenons maintenant $\alpha = (\|\varphi\|^2 s^2, \|\varphi\|^2)$ puis $\mathcal{X} = C \times C, \pi = \text{id}$ (donc $U = \mathcal{X}$) et $\mathcal{M} = \beta_{s,\varphi}^* \mathcal{L}$. En particulier, nous avons $\mathcal{N}_\alpha = p_1^* \mathcal{L}^{\otimes \|\varphi\|^2 s^2} \otimes p_2^* \mathcal{L}^{\otimes \|\varphi\|^2}$. Nous définissons $\iota' : C \times C \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{N'}$ associé à $\mathcal{P} = \mathcal{N}_\alpha^{\otimes t_1}$ à l'aide d'un morphisme de Segre-Veronese à partir de j . Ceci assure que $j_1 = \text{id}_{\mathcal{P}}$ est bien donné par des monômes.

Pour décrire les deux ingrédients restants (à savoir Σ et j_2), il nous faut réécrire $\mathcal{P} \otimes \mathcal{M}^{\otimes -1}$. Pour ce faire, notons

$$\varphi = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_g \\ b_1 & \cdots & b_g \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

et introduisons une famille $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2^{2g}}$ avec $\varphi_1 = \tilde{\varphi}$ et comprenant tous les éléments de la forme

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \pm a_1 & \pm a_2 & \cdots & \pm a_g \\ \pm b_1 & \pm b_2 & \cdots & \pm b_g \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Si nous posons alors

$$\tilde{\mathcal{M}} = \bigotimes_{i=2}^{2^{2g}} \beta_{s, \varphi_i}^* \mathcal{L}, \tag{2.28}$$

le théorème du cube et la relation $a^* \mathcal{L}_0 \simeq \mathcal{L}_0^{\otimes |a|^2}$ entraînent

$$\mathcal{M} \otimes \tilde{\mathcal{M}} \simeq \bigotimes_{i=1}^g \left(p_1^* q_i^* \mathcal{L}_0^{\otimes s^2} \otimes p_2^* q_i^* \mathcal{L}_0 \right)^{\otimes 2^{2g} (|a_i|^2 + |b_i|^2)}. \tag{2.29}$$

Par conséquent, le faisceau $\mathcal{P} \otimes \mathcal{M}^{\otimes -1}$ est isomorphe à

$$\tilde{\mathcal{M}} \otimes \bigotimes_{i=1}^g \left(p_1^* q_i^* \mathcal{L}_0^{\otimes s^2} \otimes p_2^* q_i^* \mathcal{L}_0 \right)^{\otimes 2^{2g} (2\|\varphi\|^2 - |a_i|^2 - |b_i|^2)}. \tag{2.30}$$

Nous pouvons définir Σ comme la famille provenant des $N_0 + 1$ sections fixées de \mathcal{L}_0 dans cette écriture : cela donne $(N + 1)^{2^{2g}-1}$ sections pour $\tilde{\mathcal{M}}$ et $(N_0 + 1)^{2g} = (N + 1)^2$ pour le reste d'où $\text{Card } \Sigma = M$.

Finalement définissons $j_2 : \mathcal{P} \otimes \mathcal{M}^{\otimes -1} \hookrightarrow \mathcal{P}$ comme la multiplication par une section globale de \mathcal{M} (provenant de l'une des $N + 1$ sections fixées de \mathcal{L}) non nulle au voisinage de (x, y) . De cette manière, j_2 dépend de (s, φ, x, y) mais à travers un choix fini donc δ , fixé ci-dessous, peut en être choisi indépendant quitte à prendre un maximum.

Pour justifier les choix de Σ et j_2 , il reste à expliquer pourquoi $j_2(\Sigma)$ peut être décrit par des polynômes de hauteur au plus $\delta(s^2 + 1)\|\varphi\|^2$. Nous procédons comme dans [7, proposition 5.2] : tout se passe au niveau de l'isomorphisme donné plus haut pour $\mathcal{M} \otimes \tilde{\mathcal{M}}$, les termes supplémentaires servant à avoir la «marge» donnée par $f(a)$ dans cette référence. Pour voir qu'il suffit de connaître la formule pour $[a]^*$ si $a \in \mathbb{Z}$ remarquons que le produit de tous les β_{s, φ_i} se décompose en

$$C \times C \hookrightarrow E^{2g} \xrightarrow{m_{s, \varphi}} E^{4g} \xrightarrow{\xi} E^{2^{2g+1}}, \tag{2.31}$$

où ξ est un morphisme fixé une fois pour toutes et $m_{s, \varphi}$ est donné uniquement par des multiplications par des entiers (obtenus comme produits de s ou 1 par les différentes coordonnées des a_i et b_i dans une base fixée de $\text{End}(E)$). Nous pouvons donc substituer dans des polynômes donnant ξ les formules de [7] pour $[a]^*$ et obtenir le résultat.

Tout est donc en place pour appliquer le théorème central de [9] puisque la condition essentielle est remplie en vertu du lemme 2.4. Nous obtenons donc c_1 , c_2 et c_3 tels que si $s^2\|\varphi\|^2 \geq c_2\|\varphi\|^2$ et $h(x) \geq c_3$ et $h(y) \geq c_3$ alors

$$c_1 h_{\mathcal{M}}(x, y) \geq \|\varphi\|^2 (s^2 h(x) + h(y)). \tag{2.32}$$

Il reste à substituer des hauteurs normalisées afin d'avoir la proposition 2.1. Cela nécessite de modifier c_1 et c_3 . En effet, avec nos définitions,

$$h_{\mathcal{M}}(x, y) = 2^{2g} \sum_{i=1}^g (|a_i|^2 + |b_i|^2) (s^2 h(x_i) + h(y_i)) - \sum_{i=2}^{2^{2g}} h(s\varphi_i(x) - \varphi_i(y)) \tag{2.33}$$

d'où

$$h_{\mathcal{M}}(x, y) \leq |s\varphi(x) - \varphi(y)|^2 + 2^{2g}\|\varphi\|^2 (s^2 + 1)c_{\text{NT}}^0 + (2^{2g} - 1)c_{\text{NT}}. \tag{2.34}$$

Cela entraîne

$$c_1 |s\varphi(x) - \varphi(y)|^2 \geq \|\varphi\|^2 (s^2(|x|^2 - c) + (|y|^2 - c)) \tag{2.35}$$

avec par exemple $c = 2^{2g+1}c_1c_{\text{NT}}$. Si nous augmentons c_3 de sorte que $c_3 \geq 2c$, nous en déduisons

$$2c_1 |s\varphi(x) - \varphi(y)|^2 \geq \|\varphi\|^2 (s^2|x|^2 + |y|^2) \tag{2.36}$$

et il reste à remplacer c_1 par $2c_1$ pour constater que la démonstration de la proposition 2.1 est terminée.

3 Preuve du théorème 1.5

Avant de pouvoir utiliser la proposition 2.1, nous donnons quelques résultats auxiliaires.

Lemme 3.1. (1) Pour toute sous-variété abélienne B de E^g de codimension au moins 2 il existe $\varphi \in \Phi$ tel que $B \subset \text{Ker } \varphi$.

(2) Pour tout $x \in E^g(\overline{\mathbb{Q}})$ et tout $\varphi : E^g \rightarrow E^2$ nous avons $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\|x\|$. □

Démonstration. (1) Il existe φ_1 et φ_2 indépendants dans $\text{Hom}(E^g, E)$ de sorte que $B \subset \text{Ker } \varphi_i$. En remplaçant φ_2 par $\|\varphi_1\|^2\varphi_2 - (\varphi_1 \bullet \varphi_2)\varphi_1$, il vient $\varphi_1 \bullet \varphi_2 = 0$. Quitte à multiplier φ_1 et φ_2 par des entiers bien choisis, ils forment alors $\varphi \in \Phi$.

(2) D'après $\alpha^* \mathcal{L}_0 \simeq \mathcal{L}_0^{\otimes |\alpha|^2}$ nous avons sur E l'égalité $|\alpha x| = |\alpha||x|$. Par suite

$$\begin{aligned}
 |\varphi(x)|^2 &= \left| \sum_{i=1}^g a_i x_i \right|^2 + \left| \sum_{i=1}^g b_i x_i \right|^2 \\
 &\leq \left(\sum_{i=1}^g |a_i x_i| \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^g |b_i x_i| \right)^2 \\
 &\leq \|\varphi\|^2 |x|^2.
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Nous faisons maintenant une réduction du problème en tirant parti de la liberté de choix de représentants dans un ensemble du type $\Gamma_\varepsilon + B$.

Lemme 3.2. Pour démontrer le [théorème 1.5](#), il suffit de montrer que pour tout groupe Γ' de rang fini l'ensemble $S'_2(C, \Gamma'_\varepsilon)$ défini comme

$$C(\bar{\mathbb{Q}}) \cap \bigcup_{\text{codim } B \geq 2} \{ \gamma + P \mid \gamma \in \Gamma'_\varepsilon, P \in B \text{ et } \max(|\gamma|, |P|) \leq 4g|\gamma + P| \}
 \tag{3.2}$$

est de hauteur bornée pour ε assez petit. □

Démonstration. Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème. Le groupe Γ de rang fini est contenu dans $\Gamma' = (\Gamma_0)^g$ pour un certain Γ_0 , sous-groupe de $E(\bar{\mathbb{Q}})$ de rang fini, divisible et stable par $\text{End}(E)$. Nous allons montrer $S_2(C, \Gamma_\varepsilon) \subset S'_2(C, \Gamma'_{8g\varepsilon})$ (ce qui implique le lemme). Soit donc $x \in S_2(C, \Gamma_\varepsilon)$ qui s'écrit $x = \gamma + P = y + z + P$ avec $y \in \Gamma, |z|^2 \leq \varepsilon$ et $P \in B$ pour un certain B de codimension 2. En utilisant une méthode de Gauss, nous pouvons trouver

$$\varphi = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_g \\ b_1 & \cdots & b_g \end{pmatrix}
 \tag{3.3}$$

avec $a_i, b_i \in \text{End}(E)$ de sorte que $B \subset \text{Ker } \varphi$ et qu'il existe $i_1 \neq i_2$ avec $a_{i_1} = b_{i_2} = a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $a_{i_2} = b_{i_1} = 0$ et $|a_i| \leq 2a, |b_i| \leq 2a$ pour tout i . En particulier, $\|\varphi\|^2 \leq 8ga^2$ et si $\psi : E^g \rightarrow E^g$ s'obtient en composant φ avec l'injection $E^2 \hookrightarrow E^g$ suivant les facteurs i_1 et i_2 nous avons $\varphi \circ \psi = a\varphi$.

Dans ces conditions $\psi(y) \in \Gamma'$ et il existe $y' \in \Gamma'$ avec $ay' = \psi(y)$. Soient encore $z' \in E^g(\bar{\mathbb{Q}})$ tel que $az' = \psi(z)$ puis $\gamma' = y' + z'$ et $P' = x - \gamma'$. D'après le lemme précédent $|\psi(z)|^2 = |\varphi(z)|^2 \leq 8ga^2\varepsilon$ et cela donne $\gamma' \in \Gamma'_{8g\varepsilon}$. De plus $P' \in B + A_{\text{tors}}$ car $\varphi(aP') = a\varphi(y - y' + z - z') = a\varphi(y) - \varphi \circ \psi(y) + a\varphi(z) - \varphi \circ \psi(z) = 0$. Finalement $a|\gamma'| = |\psi(\gamma)| = |\varphi(x)| \leq \sqrt{8ga}|x|$ et $|P'| \leq |x| + |\gamma'| \leq (\sqrt{8g} + 1)|x| \leq 4g|x|$. Ceci montre bien $x \in S'_2(C, \Gamma'_{8g\varepsilon})$. ■

L'étape principale de la preuve du théorème consiste à rendre proche à la fois des éléments de Γ_ε et de $\text{Hom}(E^g, E^2)$.

Lemme 3.3. (1) De toute suite d'éléments non nuls de $\text{Hom}(E^g, E^2)$ on peut extraire une sous-suite dans laquelle deux termes quelconques φ et φ' vérifient

$$\left\| \frac{\varphi}{\|\varphi\|} - \frac{\varphi'}{\|\varphi'\|} \right\| \leq \frac{1}{16gc_1}. \tag{3.4}$$

(2) De même si $\varepsilon \leq 2^{-14}g^2c_1^2$ on peut extraire de toute suite d'éléments de $\{\gamma \in \Gamma_\varepsilon \mid |\gamma| \geq 1\}$ une sous-suite dans laquelle deux termes quelconques γ et γ' vérifient

$$\left| \frac{\gamma}{|\gamma|} - \frac{\gamma'}{|\gamma'|} \right| \leq \frac{1}{16gc_1}. \tag{3.5}$$

□

Démonstration. Dans le premier cas, l'assertion résulte facilement de la compacité de la sphère unité de $\text{Hom}(E^g, E^2) \otimes \mathbb{R}$ et du principe des tiroirs. Dans le second cas, le même raisonnement s'applique à $\Gamma \otimes \mathbb{R}$. Nous pouvons donc supposer $\gamma = y + z, \gamma' = y' + z'$ avec $|z|, |z'| \leq \sqrt{\varepsilon}$ et $y, y' \in \Gamma$ tels que

$$\left| \frac{y}{|y|} - \frac{y'}{|y'|} \right| \leq \frac{1}{32gc_1}. \tag{3.6}$$

La conclusion découle de

$$\begin{aligned} \left| \frac{\gamma}{|\gamma|} - \frac{\gamma'}{|\gamma'|} \right| &\leq \frac{1}{32gc_1} + \left| \frac{\gamma}{|\gamma|} - \frac{y}{|y|} \right| + \left| \frac{\gamma'}{|\gamma'|} - \frac{y'}{|y'|} \right| \\ &\leq \frac{1}{32gc_1} + \frac{2|z|}{|y|} + \frac{2|z'|}{|y'|} \\ &\leq \frac{1}{32gc_1} + 4\sqrt{\varepsilon} \end{aligned} \tag{3.7}$$

grâce à la valeur choisie pour ε (voir aussi [8, lemme 5.1] pour un raisonnement semblable). ■

La démonstration du [théorème 1.5](#) repose sur le calcul suivant : si $x = \gamma + P$ et $y = \gamma' + P'$ dans $E^g(\overline{\mathbb{Q}})$ avec $\varphi(P) = 0$ et $\varphi'(P') = 0$ pour $\varphi, \varphi' : E^g \rightarrow E^2$, nous avons

$$\begin{aligned} |s\varphi(x) - \varphi(y)| &= |\varphi(s\gamma - \gamma') - \varphi(P')| \\ &= |\varphi(s\gamma - \gamma') + (\varphi' - \varphi)(P')| \\ &\leq \|\varphi\|s|\gamma - \gamma'| + \|\varphi' - \varphi\|P'. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Grâce au lemme d'extraction, nous allons rendre $s|\gamma - \gamma'|$ et $\|\varphi' - \varphi\|$ suffisamment petits pour obtenir une contradiction avec l'inégalité de Vojta si $x, y \in C(\overline{\mathbb{Q}})$.

Précisément nous raisonnons par l'absurde comme suit. Soit $\varepsilon \leq 2^{-14}g^2c_1^2$. Nous supposons qu'il existe une suite de points $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $C(\bar{\mathbb{Q}})$ dont la hauteur tend vers l'infini et telle que $x_i = \gamma_i + P_i$ avec $\gamma_i \in \Gamma_\varepsilon$ et $\varphi_i(P_i) = 0$ pour un certain $\varphi_i \in \Phi$; de plus, en utilisant la réduction du [lemme 3.2](#), nous imposons $\max(|\gamma_i|, |P_i|) \leq 4g|x_i|$ et, par ailleurs, $|x_i| \geq c_3$.

En vertu du [lemme 3.3](#), nous pouvons également supposer

$$\left\| \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|} - \frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|} \right\| \leq \frac{1}{16gc_1} \quad (3.9)$$

pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ et

$$\left| \frac{\gamma_i}{|\gamma_i|} - \frac{\gamma_j}{|\gamma_j|} \right| \leq \frac{1}{16gc_1} \quad (3.10)$$

pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $|\gamma_i| \geq 1$ et $|\gamma_j| \geq 1$.

Nous choisissons maintenant un entier $s \geq c_2$ et un couple (i, j) tel que

$$|s\gamma_i - \gamma_j| \leq \frac{1}{2c_1}s|x_i|. \quad (3.11)$$

Pour vérifier que c'est toujours possible, nous distinguons deux cas. Si, d'abord, la suite des $|\gamma_i|$ est bornée, disons par un réel T , nous choisissons $s \geq c_2$ quelconque puis l'entier i tel que $|x_i| \geq 4c_1T$ (par hypothèse la suite $|x_i|$ n'est pas bornée) et finalement $j = i$. Dans le cas contraire, si la suite des $|\gamma_i|$ n'est pas bornée, prenons i tel que $|\gamma_i| \geq 1$ et nous pouvons trouver j de sorte que $|\gamma_j| \geq (1 + \max(c_2, 8gc_1))|\gamma_i|$. Définissons alors s comme l'entier le plus proche de $|\gamma_j|/|\gamma_i|$. Il vient

$$\begin{aligned} |s\gamma_i - \gamma_j| &= \left| s|\gamma_i| \left(\frac{\gamma_i}{|\gamma_i|} - \frac{\gamma_j}{|\gamma_j|} \right) + \left(s - \frac{|\gamma_j|}{|\gamma_i|} \right) |\gamma_i| \frac{\gamma_j}{|\gamma_j|} \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{16gc_1} + \frac{1}{2s} \right) s|\gamma_i| \leq \frac{1}{2c_1}s|x_i|. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Notons à présent plutôt (x, y) le couple (x_i, x_j) que nous avons trouvé et φ, φ' associés. Quitte à multiplier ces morphismes par des entiers bien choisis, nous pouvons faire en sorte que

$$\|\varphi' - \varphi\| \leq \frac{1}{8gc_1}\|\varphi\|. \quad (3.13)$$

Alors notre calcul liminaire montre que

$$|s\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{1}{2c_1}\|\varphi\|(s|x| + |y|). \quad (3.14)$$

Par ailleurs, nous sommes dans les conditions d'application de la [proposition 2.1](#) dont la conclusion est clairement en contradiction avec la formule ci-dessus (avec $c_1 \geq 1$ par exemple).

4 Résultats de finitude

Nous allons réduire le [théorème 1.6](#) au résultat de finitude établi dans [10]. En effet, la démonstration dans cet article du [théorème 1.4](#) ci-dessus permet d'énoncer :

Proposition 4.1. Supposons que la courbe C ne soit contenue dans aucun sous-groupe algébrique strict de E^g et choisissons $r \geq 2$ si E est à multiplication complexe et $r \geq 2 + (g/2)$ sinon. Alors, pour tout réel H , l'ensemble

$$\{x \in S_r(C, A_{\text{tors}}) \mid h(x) \leq H\} \tag{4.1}$$

est fini. □

Notons que ceci n'est pas établi explicitement dans [10] car l'hypothèse plus forte que C est transverse est utilisée pour prouver que $S_1(C, A_{\text{tors}})$ et donc $S_r(C, A_{\text{tors}})$ est de hauteur bornée. On vérifie cependant que la démonstration de la finitude une fois la hauteur bornée donne exactement la proposition ci-dessus.

Afin de pouvoir utiliser cette proposition pour démontrer le [théorème 1.6](#), nous allons relier un ensemble de la forme $S_r(C, \Gamma)$ à un ensemble de la forme $S_r(C', A'_{\text{tors}})$.

Soient pour cela $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ des éléments de $E(\bar{\mathbb{Q}})$ indépendants sur $\text{End}(E)$ et définissons Γ_0 comme le sous-groupe de $E(\bar{\mathbb{Q}})$ formé des éléments x pour lesquels il existe un entier non nul N tel que Nx appartienne au module sur $\text{End}(E)$ engendré par $\gamma_1, \dots, \gamma_s$. Nous noterons $\Gamma = (\Gamma_0)^g$ pour l'énoncé suivant. Enfin, si C est une courbe sur $A = E^g$, désignons par C' la courbe $C \times \{\gamma_1\} \times \dots \times \{\gamma_s\}$ sur $A' = E^{g+s}$.

Proposition 4.2. Dans la situation précédente, l'isomorphisme évident $f : C \rightarrow C'$ induit des bijections

$$S_r(C, \Gamma) \simeq S_r(C', A'_{\text{tors}}) \tag{4.2}$$

pour tout r . Par ailleurs, si C est transverse dans A , alors C' n'est contenue dans aucun sous-groupe algébrique strict de A' . □

Démonstration. Supposons d'abord $x \in S_r(C, \Gamma)$. Cet élément s'écrit $x = y + P$ où $y \in \Gamma$ et P est contenu dans une sous-variété abélienne de E^g de codimension r . Ceci entraîne l'existence de r formes $\text{End}(E)$ -linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ indépendantes telles que $\varphi_i(P) = 0$

pour tout i . Par suite, nous avons $\varphi_i(x) \in \Gamma_0$ pour tout i et cela s'écrit

$$N_i \varphi_i(x) - \sum_{j=1}^s a_{i,j} \gamma_j = 0 \quad (4.3)$$

pour tout i , pour certains entiers $N_i \neq 0$ et certains éléments $a_{i,j} \in \text{End}(E)$. Ceci donne exactement r formes indépendantes ψ_1, \dots, ψ_r (en $g + s$ variables) de sorte que $\psi_i(f(x)) = 0$ pour tout i . Ainsi nous avons bien $f(x) \in S_r(C', A'_{\text{tors}})$.

Réciproquement, si $f(x) \in S_r(C', A'_{\text{tors}})$, il existe r formes linéaires indépendantes ψ_1, \dots, ψ_r vérifiant $\psi_i(f(x)) = 0$. Nous pouvons alors écrire les ψ_i sous la forme ci-dessus (par exemple avec $N_i = 1$) et les formes φ_i obtenues sont indépendantes par liberté des γ_i . De plus $\varphi_i(x) \in \Gamma_0$ pour tout i et, pour montrer que $x \in S_r(C, \Gamma)$, il suffit de trouver $y \in \Gamma$ avec $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$ pour tout i . Autrement dit, les φ_i donnent une surjection $\varphi : E^g \rightarrow E^r$ et l'on veut montrer que l'application induite $(\Gamma_0)^g \rightarrow (\Gamma_0)^r$ est surjective. Cela se peut faire assez explicitement comme dans le [lemme 3.2](#) (pour $r = 2$) ou en remarquant simplement qu'il existe un morphisme $\tilde{\varphi} : E^r \rightarrow E^g$ tel que $\varphi \circ \tilde{\varphi}$ est la multiplication par un entier $M > 0$ et donc, pour relever $z \in (\Gamma_0)^r$, on choisit y avec $My = \tilde{\varphi}(z)$ qui est bien un élément de Γ .

La dernière assertion est maintenant claire car si une forme linéaire ψ s'annulait sur C' on trouverait φ constante sur C contrairement à l'hypothèse de transversalité. ■

Passons à la démonstration du [théorème 1.6](#). Quitte à grossir Γ , on peut le supposer de la forme considérée ci-dessus (associé à $\gamma_1, \dots, \gamma_s$); remarquons que cela est possible, dans le cas où E n'a pas de multiplication complexe, sans changer la valeur de $r_0(\Gamma)$ qui est donc égale à s (le rang de Γ_0). Dans ces conditions, le [théorème 1.5](#) entraîne que $S_2(C', A'_{\text{tors}})$, grâce à la [proposition 4.2](#), est de hauteur bornée. Par conséquent, la [proposition 4.1](#) assure que $S_r(C', A'_{\text{tors}})$ est fini pour $r = 2$ ou $r \geq 2 + (g + s)/2$ selon que E est à multiplication complexe ou non. En réutilisant la [proposition 4.2](#), il en va de même pour $S_r(C, \Gamma)$ pour ce choix de r et le [théorème 1.6](#) est établi.

Enfin, pour obtenir le [théorème 1.7](#), notons d'une part que l'énoncé est clair d'après ce qui précède si la courbe C est de la forme $C_1 \times \{\gamma_1\} \times \dots \times \{\gamma_s\}$ avec C_1 transverse dans E^{g-s} . En général, on considère le plus petit translaté de sous-variété abélienne contenant C . Il existe alors une isogénie $\psi : E^g \rightarrow E^g$ dans laquelle l'image de ce translaté est $E^{g-s} \times \{\gamma_1\} \times \dots \times \{\gamma_s\}$ pour certains γ_i , qui sont libres sur $\text{End}(E)$ car C n'est pas contenue dans un sous-groupe strict de E^g . Par conséquent, $\psi(C)$ est de la forme précédente. La conclusion suit car pour toute isogénie ψ et pour tout r on a

$$S_r(C, A_{\text{tors}}) \subset \psi^{-1}(S_r(\psi(C), A_{\text{tors}})). \quad (4.4)$$

Références

- [1] E. Bombieri, D. Masser, and U. Zannier, *Intersecting a curve with algebraic subgroups of multiplicative groups*, Internat. Math. Res. Notices **1999** (1999), no. 20, 1119–1140.
- [2] S. David and M. Hindry, *Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C. M.* [Lower bound for the Neron-Tate height on abelian varieties of CM type], J. reine angew. Math. **529** (2000), 1–74 (French).
- [3] G. Faltings, *Diophantine approximation on abelian varieties*, Ann. of Math. (2) **133** (1991), no. 3, 549–576.
- [4] J. S. Milne, *Jacobian varieties*, Arithmetic Geometry (Storrs, Conn., 1984) (G. Cornell and J. Silverman, eds.), Springer, New York, 1986, pp. 167–212.
- [5] D. Mumford, *Abelian Varieties*, Oxford University Press, London, 1974.
- [6] B. Poonen, *Mordell-Lang plus Bogomolov*, Invent. Math. **137** (1999), no. 2, 413–425.
- [7] G. Rémond, *Inégalité de Vojta en dimension supérieure* [Vojta inequality in higher dimension], Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **29** (2000), no. 1, 101–151 (French).
- [8] ———, *Approximation diophantienne sur les variétés semi-abéliennes*, to appear in Ann. Sci. École Norm. Sup.
- [9] ———, *Inégalité de Vojta généralisée*, prépublication de l’Institut Fourier 584, 2003.
- [10] E. Viada, *The intersection of a curve with algebraic subgroups in a product of elliptic curves*, to appear in Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4).

Gaël Rémond : Institut Fourier, UMR 5582, BP 74, 38402 Saint-Martin-d’Hères Cedex, France

E-mail address: gael.remond@ujf-grenoble.fr

Evelina Viada : D-Math, ETH Zentrum, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Switzerland

E-mail address: viada@math.ethz.ch